ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ονομα:..

Αρ. Ταυτότητας:..

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2000
16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΩΡΑ: 0900 – 1200

ΘΕΜΑ 1:

Εστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμική, επί και συνεχής. Δείξτε ότι η T είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχουν $c_1, c_2 \rangle 0$ έτσι ώστε $c_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq c_2\|x\| \quad \forall \quad x \in X$.

ΘΕΜΑ 2:

Αφού δώσετε τον ορισμό της ασθενούς τοπολογίας ενός χώρου με νόρμα X, δείξτε ότι:

α) Ο X είναι ως προς την ασθενή τοπολογία χώρος Hausdorff.

β) Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset X$ συγκλίνει ως προς την ασθενή τοπολογία στο x_0 αν και μόνο αν $\forall\ f \in X^*$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

<u>ΘΕΜΑ 3:</u>

Εστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η κλειστή μπάλα $B^{*}=\{f\in X^{*}/\|f\|\leq 1\}$ είναι συμπαγής ως προς την ασθενή *- τοπολογία του X^{*}.

ΘΕΜΑ 4:

(α) Εστω X ένας μιγαδικός χώρος Hilbert.
Δείξτε ότι αν για ένα τελεστή A ισχύει: $\langle Ax, x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in X$ τότε $A = 0$.

(β) Ισχύει το ίδιο και σ΄ ένα πραγματικό χώρο Hilbert; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

ΘΕΜΑ 5:

Εστω ϕ ακέραια αναλυτική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|\phi(z)| \leq 1+\sqrt{|z|}$$

για κάθε $z \in \mathbf{C}$. Δείξτε ότι η ϕ είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 6:

Για $n = 1,2,3,\ldots$ έστω

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n}.$$

Να υπολογισθεί

$$\int_{|z|=2} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz.$$

ΘΕΜΑ 7:

(i) Να υπολογισθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο (residue) της συνάρτησης $\cos(z)^2 / \sin(z)^2$ στο 0.

(ii) Να βρεθεί μια αναλυτική, $1-1$ συνάρτηση από το ανοικτό χωρίο

$$A = \{z : |z| < 1\} \cap \{z : |z - i| < \sqrt{2}\}$$

επί του ανοικτού δίσκου $B = \{z : |z| < 1\}$.

ΘΕΜΑ 8:

Να υπολογισθεί:

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} \frac{\exp\left(e^{2it}\right)\left(e^{it}-1/2\right)}{1-\dfrac{e^{it}}{2}}dt .$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ

Εαρινό Εξάμηνο 2000-2001
Σάββατο 3 Φεβρουαρίου 2001

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2001

Θέμα 1:

Να αποδείξετε ότι αν $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ είναι αριθμησίμου πλήθους υποσύνολα του $\mathbf{IR}$ τότε

$$m^*\left(\bigcup_{\mathrm{n}} \mathbf{E}_{\mathrm{n}}\right) \leq \sum_n m^*(E_n).$$

Θέμα 2:

Να εξετάσετε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω προτάσεις (δίνοντας απόδειξη ή αντιπαράδειγμα).

(j) Κάθε υποσύνολο μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο.
(ii) Κάθε μη μετρήσιμο σύνολο είναι υπεραριθμήσιμο.
(iii) Αν $m(E)=0$ τότε $\mathbf{IR}\setminus E$ είναι πυκνό στο $\mathbf{IR}$.
(iv) Το σύνολο των ρητών του διαστήματος $(0,1)$ δεν είναι G_δ σύνολο.
(v) Κάθε σύνολο πρώτης κατηγορίας είναι πουθενά πυκνό.

Θέμα 3:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{οταν} \quad x\in\left(0,\frac{1}{\pi}\right] \\ 0 & \text{οταν} \quad x=0 \end{cases}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$E=\left\{x \mid x\in\left[0,\frac{1}{\pi}\right] \text{και } f(x)\geq 0\right\}.$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο E είναι μετρήσιμο και να υπολογισθεί το μέτρο *Lebesgue* $m(E)$ αυτού του συνόλου. Είναι το σύνολο E συμπαγές;

Θέμα 4:

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) := \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}, \quad x \in [-1,1].$$

Να βρεθεί η οριακή συνάρτηση f και να εξετασθεί αν η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f. Κατόπιν, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)dx \quad \text{και} \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

Τι συμπέρασμα εξάγεται από το συνδυασμό των παραπάνω αποτελεσμάτων;

Θέμα 5:

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_C z^6 \sin\frac{1}{z}\,dz, \qquad \int_C \frac{1}{z^4(z-1)}dz$$

όπου C ο κύκλος $|z| = 2$ με θετική φορά.

Θέμα 6:

Εστω $f(z)$ ακέραια αναλυτική και $|f(z)| \le |z|$ για κάθε $z \in \mathbf{C}$. Δείξτε ότι $f(z) = az$ για κάποιο $a \in \mathbf{C}$.

Θέμα 7:

(α) Πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο

$$z^5 + z^3 + 5z^2 + 2$$

μέσα στο χώριο $1 \le |z| \le 2$;

(β) Εστω $f(z) = f(x+iy) = 2x + 3x^2 - 3y^2 + i(2y + 6xy)$.

Δείξτε ότι η $f(z)$ είναι ακέραια αναλυτική. Να υπολογισθεί $\int_C f(z)dz$ όπου C ο κύκλος $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta} \quad -\pi \le \theta \le 0$.

Θεμα 8:

(α) Εστω $D = \{z \mid |z| < 1\}$

Να βρεθεί συνάρτηση $f : D \to D$ αναλυτική στο D, ούτως ώστε

(i) $f(D) = D$

(ii) $f(0) = \frac{1}{2}$

(iii) $f'(0) = \frac{3}{4}$

(β) Εστω $E = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ και $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

Να βρεθεί μετασχηματισμός Modius $w = L(z)$ που να στέλλει το E πάνω στο D και $L(1) = 0$.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

23 Σεπτεμβρίου 2000

ΟΝΟΜΑ:

1. (Βαθμοί 10)

- (α) Εστω y συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$, σημεία του $[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $H_{2n+1} \in \Pi_{2n+1}$ τέτοιο ώστε $H_{2n+1}^{(j)}(x_i) = y^{(j)}(x_i)$, για $j = 0,1$ και $i = 0,1,\ldots,n$.
- (β) Δώστε το H_{2n+1} σε μορφή Lagrange και σε μορφή Newton.
- (γ) Αν $y \in C^{2n+2}$ και $x \in [\alpha,\beta]$, να βρεθεί (με απόδειξη) έκφραση για το σφάλμα $y(x) - H_{2n+1}(x)$.
- (δ) Αν $n = 1$, $\beta - \alpha = h$ και $M_4 = ||y^{iv}|| = max_{x\in[\alpha,\beta]}|y^{iv}(x)|$, να βρεθεί φράγμα για το σφάλμα $y(x) - H_3(x)$ συναρτήσει των h και M_4.
- (ε) Αν $\alpha = 0$, $\beta = 4k$, εξετάστε κατά πόσο υπάρχει πολυώνυμο $p \in \Pi_4$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$p'(k) = y_1',\ p''(k) = y''_1,\ p(2k) = y_2,\ p(3k) = y_3,\ p(4k) = y_4.$$

2. (Βαθμοί 10)

- (α) Δώστε τον ορισμό ακολουθίας ορθογωνίων πολυωνύμων στο διάστημα (α, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$.
- (β) Κατασχευάστε ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων στο (α, β) με συνάρτηση βάρους $w(x) = [(\beta - x)(x - \alpha)]^{-\frac{1}{2}}$. Δώστε τα πρώτα δύο πολυώνυμα.
- (γ) Ποία η σχέση αυτών των πολυωνύμων με τα αντίστοιχα πολυώνυμα Chebyshev $\hat{T}_n$ στο διάστημα (α, β);
- (δ) Τα πολυώνυμα Chebyshev $\hat{T}_n$ στο διάστημα (α, β) ιχανοποιούν τις σχέσεις:
  - (ι) $\hat{T}_{n+1}(x) = a(x)\hat{T}_n(x) + b(x)\hat{T}_{n-1}(x)$,
  - (ιι) $\hat{T}_n(x) = c_n\hat{T}'_{n+1}(x) + d_n\hat{T}'_{n-1}(x)$.

  Να βρεθούν τα $a(x), b(x), c_n$ χαι d_n.

3. (Βαθμοί 10)

- (α) Δώστε τους τύπους των τριών μεθόδων ενός βήματος (Αμεσης Euler, Εμμεσης Euler και μεθοδου του χανόνα του τραπεζίου) γιά το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 0$. Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής των τριών μεθόδων.
- (β) Δώστε το γενικό τύπο $\kappa-$βημάτων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y' = f(x, y), \;\; y(\alpha) = a.$$

- (γ) Περιγράψτε την πιό πάνω μέθοδο για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y^{(n)} + c_{n-1}(x)y^{(n-1)} + c_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + c_0(x)y = g(x),$$

$$y(\alpha) = a_0, \; y'(\alpha) = a_1, \ldots, \; y^{(n-1)}(\alpha) = a_{n-1}.$$

- (δ) Να βρεθεί η πλέον αχριβής άμεση μέθοδος τριών βημάτων. Δώστε το τοπικό σφάλμα αποχοπής.
- (ε) Εξετάστε την μερική ευστάθεια της μεθόδου Adams-Moulton δύο βημάτων για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = \lambda y, \; \lambda < 0, \;\; y(0) = a.$

4. (Βαθμοί 10) Δίδεται το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad , \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty)\,, \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0\,,\, x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

και έστω ότι χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση τησ λύσης του την πιό χάτω μέθοδο:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{k}{h^2}\{\theta(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (1-\theta)(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)\}\,,$$

όπου $h = \Delta x$ και $k = \Delta t$.

- (α) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής.
- (β) Να μελετηθεί η ευστάθεια του ανωτέρω σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τη μέθοδο von Neumann.
- (γ) Να μελετηθεί η ευστάθεια του ανωτέρω σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τη μέθοδο των πινάχων.
- (δ) Να μελετηθεί η ευστάθεια του ανωτέρω σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τη μέθοδο των πινάχων στην περίπτωση όπου $\theta = 1$ και όπου οι συνοριακές συνθήκες είναι $\frac{\partial u(0,t)}{\partial n} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial n} = 0$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Ονομα:...

Αρ. Ταυτότητας:...

Χειμερινό Εξάμηνο 2000-2001
23 Σεπτεμβρίου 2000
Ωρα: 0900-1200
Αίθουσα: Ε102

ΘΕΜΑ 1°

Εστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με σ.π.π.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2} & 0 \le x < \theta \\ 0 & \textit{διαφορετικα} \end{cases}$$

όπου $\theta > 0$.

(α) Να προσδιορισθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) για τη διάμεσο της κατανομής και να δειχθεί ότι αποτελεί επαρκή στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο θ.

(β) Να δειχθεί ότι η ΕΜΠ δεν είναι αμερόληπτη για τη διάμεσο. Να τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να γίνει αμερόληπτη. Να υπολογισθεί η διασπορά της αμερολήπτου εκτιμήτριας.

(γ) Να υπολογισθεί το κάτω φράγμα των Cramer-Rao για την αμερόληπτη εκτιμήτρια της διαμέσου με συνήθη παραγώγιση. Αντίκειται το αποτέλεσμα στο θεώρημα των Cramer-Rao;

<u>ΘΕΜΑ 2°</u>

Εστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0,\ \theta > 0$$

(α) Να δειχθεί ότι η πιο πάνω οικογένεια κατανομών είναι εκθετική.

(β) Να προσδιορισθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το θ.

(γ) Να δοθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια για $F_\theta(a) = \int_0^a f(x;\theta)\,dx$ όπου $\alpha \in R^+$ γνωστός θετικός αριθμός.

(δ) Να δειχθεί ότι

$$\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \sim beta(1, n-1), \ \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου $beta(\beta, \gamma)$ η σ.π.π. της κατανομής *beta* με παραμέτρους β και γ.

(ε) Αν $\dfrac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ και X_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ να προσδιορισθεί ΑΟΕΔ (Αμερόληπτη ομοιομόρφως ελάχιστης διασποράς) εκτιμήτρια για την $F_\theta(a)$.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Εστω X μια $N(0,\theta)$ τυχαία μεταβλητή και έστω η εκτιμήτρια

$$S_X(a,\beta) = aX^2 + \beta$$

της θ, όπου α και β γνωστοί πραγματικοί αριθμοί.

(α) Να υπολογισθεί το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (MSE) της $S_X(a,\beta)$.

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση της φυσικής εκτιμήτριας $S_X(1,0)$ καθώς και της εκτιμήτριας $S_X(0,1)$ ως συνάρτηση της θ. Να διερευνηθεί κατά πόσο η μια είναι καλύτερη (καταλληλότερη) από την άλλη ως προς το MSE δια κάθε θ.

ΘΕΜΑ 4°

(α) Δώστε τον ορισμό του ομοιόμορφα βέλτιστου α – ελέγχου και του μεγιστο-ελαχίστου α – ελέγχου, $\alpha \in (0,1)$. Είναι ένας ομοιόμορφα βέλτιστος α – έλεγχος και αμερόληπτος; Είναι μοναδικός; Είναι ένας μεγιστο-ελάχιστος α – έλεγχος και ομοιόμορφα βέλτιστος α – έλεγχος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(β) Εστω X_1, X_2, X_3 τυχαίο δείγμα όπου $X_i \sim Bernoulli(p)$. Θέλουμε να εξετάσουμε τη μηδενική υπόθεση $H_0 : p \geq p_o$ ενάντια στην εναλλακτική $H_1 : p < p_o$ για κάποιο $p_o \in (0,1)$. Εστω έλεγχος τ_1 με ελεγχοσυνάρτηση $T_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 X_3$. Ο έλεγχος αυτός απορρίπτει αν και μόνο $T_1(X_1, X_2, X_3) = 0$.

(ι) Για ποιό p είναι η πιθανότητα να απορριφθεί η H_0 ίση με p^3;

(ιι) Εστω έλεγχος τ_2 με ελεγχοσυνάρτηση $T_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3$. Καθορίστε το χωρίο απορρίψεως του ελέγχου τ_2 έτσι ώστε το επίπεδο του να είναι το ίδιο με αυτό του τ_1. Ποιος έλεγχος από τους δύο είναι ισχυρότερος και γιατί;

ΘΕΜΑ 5^{o}

Εστω f_1 και f_2 πυκνότητες των μέτρων πιθανότητας P_1 και P_2 ως προς κάποιο σ – πεπερασμένο μέτρο μ. Ορίζουμε την παραμετρική οικογένεια μέτρων πιθανότητας

$$P_\theta = \{ P_\theta | \ \theta \in [0,1] \}$$

όπου κάθε P_θ έχει πυκνότητα

$$f_\theta = \theta f_1 + (1-\theta) f_2 , \quad \theta \in [0,1].$$

Για $\alpha \in (0,1)$ και $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, έστω ο έλεγχος με μηδενική υπόθεση

$$H_0 : f_\theta \in \{ f_\theta | \ \theta \in [0,\theta_0] \cup [\theta_1,1] \}$$

και εναλλακτική υπόθεση

$$H_1 : f_\theta \in \{ f_\theta | \ \theta \in (\theta_0,\theta_1) \}.$$

Δείξτε ότι ο έλεγχος $\tau = \alpha$ είναι ομοιόμορφα βέλτιστος α – έλεγχος.