EE 10-11

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
12 Φεβρουαρίου, 2011

Να επιλυθούν δύο θέματα
Να αιτιολογηθούν πλήρως όλες οι απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1. (i) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ἀνοικτό χωρίο, u ολόμορφη συνάρτηση στό Ω, $z_0 \in \Omega$ και

$$\varrho = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Δείξατε ότι η u εκφράζεται ως δυναμοσειρά γύρω από το z_0 με ακτίνα συγκλίσεως ίση ή μεγαλύτερη του ϱ. [5 μονάδες]

(ii) Ταξινομήσατε το ανώμαλο σημείο $z = 0$ για την συνάρτηση

$$g(z) = z \exp\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right).$$

[5 μοναδες]

ΘΕΜΑ 2. (i) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$. [5 μοναδες]

(ii) Έστω $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| \quad 1\}$ και $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν η g ειναι και αναλυτική στο $D(0,1) \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, τότε δείξατε ότι η g είναι αναλυτική στο $D(0,1)$. [5 μοναδες]

ΘΕΜΑ 3. (i) Έστω Ω απλά συνεκτικό χωρίο, f, g ολόμορφες στο Ω καί γ απλή κλειστή και τμηματικώς ομαλή καμπύλη στο Ω. Αν

$$\operatorname{Im} \frac{f(z)}{g(z)} \neq 0 \quad \text{για κάθε } z \in \gamma,$$

τότε δείξατε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο εσωτερικό της γ. [5 μονάδες]

(ii) Έστω $R(z) = p(z)/q(z)$ ρητή συνάρτηση, όπου

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad \text{και} \quad q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m,$$

μέ $a_n, b_m \neq 0$. Έστω επίσης ότι η συνάρτηση R είναι ολόμορφη στό $\mathbb{C} \setminus \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ και έχει πόλους στα σημεία $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$. Αν

$$|f(z)| \leq |R(z)|,$$

για κάθε z στο οποίο ορίζονται και οι δύο συναρτήσεις f και R, τότε δείξατε ότι $f(z) = kR(z)$, όπου k σταθερά. [5 μονάδες]

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Παρακαλώ λύσετε δύο από τα τρία θεματα.

ΘΕΜΑ 1. Έστω $\mathcal{M}$ η σ-άλγεβρα των κατά Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(i) Έστω $E \in \mathcal{M}$ ένα μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου μέτρου και $f_k : E \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σε μια συνάρτηση f σχεδόν παντού στο E. Να αποδείξετε ότι εάν $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$, τότε υπάρχει $A \subset E$ με μέτρο $m(A) \quad \delta$ και $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| \quad \varepsilon, \qquad \forall x \in E \setminus A, \quad \forall n \geq N_0 .$$

(ii) Έστω $E \in \mathcal{M}$ ένα μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου μέτρου και $f_k : E \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σε μια συνάρτηση f σχεδόν παντού στο E. Να αποδείξετε ότι εάν $\eta > 0$, υπάρχει υποσύνολο $A \subset E$ με $m(A) \quad \eta$ τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $E \setminus A$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα στο 1(i)).

ΘΕΜΑ 2. Δίδεται η ακολουθία συναρτήσεων

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2(1-nx) & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Να βρεθεί η οριακή συνάρτηση $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

(ii) Να εξετάσετε εάν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0,1]$.

(iii) Να εξετάσετε εάν ισχύει η ισότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx$$

και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx$.

(iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty$.

ΘΕΜΑ 3. (i) Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, όπου $f_n \in L^2([0,1])$ και $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $\|f_n\|_2 \leq 1$ και $f_n \to 0$ σχεδόν παντού. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 0.$$

(ii) Ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα εάν $f_n \in L^1([0,1])$, $\|f_n\|_1 \leq 1$ και $f_n \to 0$ σχεδόν παντού;

1 Ορίζω στον $\mathbf{R}^3$ την 2-μορφή

$$\omega = xdx \wedge dz + zdx \wedge dy \ .$$

(ι) Είναι η ω ακριβής; (Δηλαδή υπάρχει η τέτοια ώστε $d\eta = \omega$;)
(ιι) Έστω f η συνάρτηση $f(x,y,z) = (x,y,xz)$. Δείξτε ότι

$$f^* d\omega = df^* \omega \ .$$

2 Έστω $O(n)$ η πολλάπλότητα των ορθογωνίων πινάκων $\{A \in GL(n,\mathbf{R}) \quad AA^t = I\}$ όπου I ο μοναδιαίος πίνακας και A^t ο ανάστροφος του A. Δείξτε ότι ο εφαπτόμενος χώρος στο I είναι όντως διανυσματικός χώρος. Να καθορίσετε τους πίνακες που ανήκουν στον εφαπτόμενο χώρο. Ποιά είναι η διάσταση του $O(n)$;

3 Έστω (M,g) πολλαπλότητα *Riemann* και $c : [a,b] \to M$ διαφορίσιμη καμπύλη. Ορίστε την παράλληλη μετατόπιση από το $c(a)$ στο $c(b)$ κατά μήκος της c και δείξτε οτι είναι ισομετρία.

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Έστω K ένα πεπερασμένο σώμα. Δείξτε ότι για κάθε $n > 0$ υπάρχει ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) \in K[x]$ τέτοιο ώστε $\deg f(x) = n$. Ισχύει αυτό στην περίπτωση $K = \mathbb{Q}$;

2. Έστω A ένας δακτύλιος της Noether και $f\colon A \to A$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Δείξτε ότι ο f είναι ισομορφισμός.

Εστω $\theta = \exp(\pi i/m)$, όπου m είναι θετικός ακέραιος, $m > 1$. Εστω επίσης $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$ όπου $A = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1/\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Βρείτε την τάξη της G. (Υπόδειξη : Ελέγξτε ότι $B^2 = (AB)^2$.)