ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

12 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2014

**Να απαντηθούν και τα 6 θέματα**

ΟΝΟΜΑ: ______________________________

| Άσκηση | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Βαθμός |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Μονάδες | | | | | | | |

Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$y' = Ay + g(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0$ όπου $A$ σταθερός $N \times N$ πίνακας. (1)

(Το πιο πάνω πρόβλημα αφορά τα θέματα 1, 2 και 3.)

**1. (10 μονάδες)**

Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες μέθοδοι για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (1) συγκλίνουν

**(i)** Η άμεση μέθοδος του Euler.

**(ii)** Η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου.

**2. (10 μονάδες)**

Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2y'' + y = 9e^{2t}, \quad t > 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \qquad (2)$$

**(i)** Να βρεθεί η ακριβής λύση του προβλήματος (2).

**(ii)** Να μετατραπεί το πρόβλημα (2) στη μορφή του προβλήματος (1).

**3. (10 μονάδες)**

Να υπολογιστούν τα $y_1$ που προκύπτουν από την εφαρμογή της άμεσης μεθόδου του Euler και της μεθόδου του κανόνος του τραπεζίου στο πρόβλημα (2) (στην μορφή (1)).

**4. (10 μονάδες)**

Θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα

(W) Να βρεθεί $u \in V \ni B(u,v) = F(v) \ \forall v \in V$

και το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα

($\mathrm{W}_N$) Να βρεθεί $u_N \in V_N \ni B(u_N,v) = F(v) \ \forall v \in V_N$

όπου $V_N \subset V$ ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $V$, η διγραμμική μορφή $B(\cdot,\cdot)$ είναι συμμετρική, συνεκτική και συνεχής, και το γραμμικό συναρτησιακό $F(\cdot)$ είναι συνεχές.

**(α)** Να δειχτεί ότι

$$\|u - u_N\|_V \le C\|u - w\|_V \ \forall w \in V_N$$

όπου $\|\cdot\|_V$ η νόρμα του χώρου $V$ και $C > 0$ μια σταθερά.

**(β)** Έστω $\{\psi_1, ..., \psi_N\}$ μια γραμμικώς ανεξάρτητη βάση του $V_N$. Να δείξετε ότι το διακριτό πρόβλημα ($W_N$) μπορεί να γραφτεί σαν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων του οποίου ο πίνακας συντελεστών είναι θετικά ορισμένος.

**5. (10 μονάδες)**

Θεωρούμε το εξής ΠΣΤ: Να βρεθεί η συνάρτηση $u$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} (\alpha(x)u'(x))' + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = f(x) \text{ για } x \in I = (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, f \in C^1(I)$ δοθείσες, θετικές, φραγμένες συναρτήσεις, με $\|\alpha\|_{L^2(I)} \geq 1$.

Να βρεθεί μια συμμετρική μεταβολική μορφή του πιο πάνω ΠΣΤ και να δειχθεί ότι το μεταβολικό πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

**6. (10 μονάδες)**

Θεωρούμε το μεταβολικό πρόβλημα: Να βρεθεί η $u \in H_0^1(I)$ τέτοια ώστε

$$\int_I \{a(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\}\, dx = \int_I f(x)v(x) \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

και το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα: Να βρεθεί η $u_h \in V_h \subset H_0^1(I)$ τέτοια ώστε

$$\int_I \{a(x)u_h'(x)v'(x) + c(x)u_h(x)v(x)\}\, dx = \int_I f(x)v(x) \quad \forall v \in V_h$$

όπου $a, b, c, f \in C(I)$ δοθείσες, θετικές, φραγμένες συναρτήσεις, με $\|a\|_{L^2(I)} \geq 1$,

Έστω $V_h$ ο χώρος των κατά-τμήματα πολυωνύμων $1^{ου}$ βαθμού που ορίζονται σε ένα ομοιόμορφο πλέγμα στο $I = (0, 1)$, με $M$ υποδιαστήματα ίσου μήκους $h$.

Να δείξετε ότι

$$\|u - u_h\|_E \leq Ch\|u''\|_{L^2(I)},$$

όπου $\|\cdot\|_E$ η νόρμα ενέργειας που αντιστοιχεί στη διγραμμική μορφή του μεταβολικού προβλήματος και $C$ μια θετική αυθαίρετη σταθερά.

Πανεπιστήμιο Κύπρου

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ

# ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**ΟΝΟΜΑ :** ..............................................

**ΕΠΩΝΥΜΟ :** ..........................................

| Άσκηση | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Βαθμός |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Μονάδες (MAX) | | | | | | | |

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ ΕΞΙ ΘΕΜΑΤΑ

1. Αν $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x_1, x_2)$, να επιλυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{x_1}^2 u_{x_2} = 4, & x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 > 0, \\ u(x_1, 0) = -x_1, & x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Να βρεθεί η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της θερμότητας.
Υποδειξη. Αναζητούμε αρχικά λύσεις της μορφής $u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v(\frac{x}{t^\beta})$.

3. Έστω $U$ ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο $\partial U$ στο $C^1$ και

$$I[w] \doteq \frac{1}{2} \int_U |Dw|^2 \, dx$$

όπου $w$ ανήκει στο σύνολο $\mathcal{A} = \{ w \in C^2(\bar{U}) : \; w = g \text{ στο } \partial U \}$.

Να προσδιορίσετε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που επιλύει η συνάρτηση $u \in \mathcal{A}$, η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Να δείξετε όλα τα βήματα της απόδειξης σας.

4. Έστω $K = [0,1] \times [0,T]$ και

$$L = [0,1] \times \{0\} \cup \{0,1\} \times [0,T],$$

και έστω ότι η συνάρτηση $u = u(x,t) : K \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την εξίσωση $u_t = u_{xx}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\max_{(x,t)\in K} u(x,t) = \max_{(x,t)\in L} u(x,t).$$

5. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη ως προς αμφότερες τις μεταβλητές της. Να αποδειχθεί ότι η $f$ ικανοποιεί τήν εξίσωση

$$f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

αν και μόνον αν η $f$ είναι της μορφής

$$f(x,y) = F(x+y) + G(x-y),$$

για κατάλληλες δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ λύση της εξισώσεως

$$\Delta u + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, u_{x_k} + c(x)\, u = 0,$$

όπου $a, b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ συνεχείς καί $c(x) < 0$, για κάθε $x \in \Omega$. Αν η $u$ μηδενίζεται επί του συνόρου του $\Omega$, τότε να αποδειχθεί ότι μηδενίζεται σ' όλο το $\Omega$.

Γενικες Μεταπτυχιακες Εξετασεις.
Πραγματικη Αναλυση.
30/1/14
Να απαντηθουν ολα τα θεματα

Θεμα 1:

Εστω η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{οταν } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{οταν } x = 0. \end{cases} \quad (.1)$$

Να εξεταστει αν η συναρτηση $f$ ειναι *Lebesgue* ολοκληρωσιμη στο διαστημα $[0,1]$. Ειναι ολοκληρωσιμη κατα *Riemann*; Να υπολογιστει το ολοκληρωμα *Lebesgue* $\int_0^1 f(x)dx$

Θεμα 2:

Εστω οτι η συναρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ειναι *Lebesgue* ολοκληρωσιμη και ομοιομορφα συνεχης. Δειξτε οτι $\lim_{|t| \longrightarrow +\infty} g(t) = 0$. Αν η συναρτηση $g(t)$ ειναο μονον *Lebesgue* ολοκληρωσιμη ισχυει το ιδιο συμπερασμα;

Θεμα 3:

Εστω οτι η συναρτηση $f : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ειναι *Lebesgue* ολοκληρωσιμη. Οριζω την συναρτηση

$$g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} dt, \; 0 < x \leq b.$$

Δειξτε οτι συναρτηση $g(x)$ ειναι *Lebesgue* ολοκληρωσιμη στο $[0,b]$. Επιπλεον, δειξτε οτι

$$\int_0^b g(x)dx = \int_0^b f(t)dt.$$

Θέμα 4: (ι) Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση του χωρίου

$$\{|z-i|<1\} \cap \{|z-\frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$$

πάνω στο μοναδιαίο δίσκο $|z|<1$.

(ιι) Να υπολογισθεί η σειρά Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-3)}$$

σε δυνάμεις του $z$ στο χωρίο $\{z \; |1 < |z| < 3\}$.

Θέμα 5: Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_C e^{\frac{1}{z}} dz, \qquad \int_C \frac{z^2+z-2}{z^2(z-1)} dz$$

όπου $C$ ο κύκλος $|z|=2$ με θετική φορά.

Θέμα 6: (ι) Να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rouche.

(ιι) Πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο

$$z^7 - 2z^3 + 7$$

μέσα στο χωρίο $|z|<2$;