



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρία διαταραχών
στην υπερσυμμετρική θεωρία
Yang-Mills και στην
Κβαντική Χρωμοδυναμική
στο πλέγμα

Νικόλας Ανδρέου

ΜΑΪΟΣ 2016

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θεωρία διαταραχών
στην υπερσυμμετρική θεωρία
Yang-Mills και στην
Κβαντική Χρωμοδυναμική
στο πλέγμα

Νικόλας Ανδρέου

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαράλαμπος Παναγόπουλος

Η Διπλωματική Εργασία υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των
απαιτήσεων απόκτησης του πτυχίου Φυσικής του Τμήματος Φυσικής
του Πανεπιστημίου Κύπρου

ΜΑΪΟΣ 2016

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Υπερσυμμετρία (SUSY) είναι μια χωροχρονική συμμετρία που επεκτείνει το Καθιερωμένο Πρότυπο (SM) στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (MSSM). Στις υπερσυμμετρικές θεωρίες υπάρχει ένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο για κάθε σωματίδιο του Καθιερωμένου Προτύπου με διαφορά $\frac{1}{2}$ στο σπιν, δηλαδή υπάρχει ίσος αριθμός φερμιονικών και μποζονικών βαθμών ελευθερίας. Το ενδεχόμενο ύπαρξης της Υπερσυμμετρίας στη φύση έχει μελετηθεί τις τελευταίες περίπου 4 δεκαετίες, ωστόσο δεν έχει αποδειχθεί η ύπαρξη της αφού δεν έχουν παρατηρηθεί υπερσυμμετρικά σωματίδια. Επομένως αν η Υπερσυμμετρία υπάρχει, πρέπει να παραβιάζεται αυθόρμητα προκειμένου να συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα. Υπάρχουν σημαντικά κίνητρα χάρη στα οποία η μελέτη της συνεχίζεται μέχρι σήμερα από αρκετούς επιστήμονες. Ένα από αυτά είναι το γεγονός ότι λύνει το πρόβλημα ιεραρχίας βαθμίδας, δηλαδή τις μεγάλες διαφορές κλίμακας μεταξύ βαρύτητας και ασθενούς δύναμης. Επίσης, ενοποιεί τις ισχυρές και ηλεκτροασθενείς αλληλεπιδράσεις σε υψηλές ενέργειες. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτές τις ενέργειες, σε υπερσυμμετρικές θεωρίες οι θεμελιώδεις δυνάμεις εκτός της βαρύτητας χαρακτηρίζονται από την ίδια σταθερά σύζευξης. Επιπλέον, η Υπερσυμμετρία είναι απαραίτητη για την μελέτη της Κβαντικής Βαρύτητας μέσω θεωριών χορδών. Ένα άλλο κίνητρο για την μελέτη της είναι το γεγονός ότι ένα υπερσυμμετρικό σωματίδιο είναι πιθανός υποψήφιος για την σκοτεινή ύλη.

Πολλά από τα φαινόμενα που εμφανίζονται σε θεωρίες κβαντικών πεδίων δεν μπορούν να μελετηθούν διαταραχτικά (π.χ δέσμιες καταστάσεις - αδρονικό φάσμα, ινσταντόνια - μαγνητικά μονόπολα, αυθόρμητη παραβίαση συμμετριών - αλλαγές φάσης). Δεδομένου ότι η Υπερσυμμετρία, αν υπάρχει, πρέπει να παραβιάζεται αυθόρμητα, είναι φανερό ότι μια διεξοδική μελέτη της Υπερσυμμετρίας απαιτεί μη-διαταραχτικές μεθόδους. Γενικά, η βασική μέθοδος ποσοτικής μελέτης Θεωριών Κβαντικών Πεδίων απαιτεί τη διακριτοποίηση του χωροχρόνου σ' ένα πλέγμα. Όμως, η μη-διαταραχτική μελέτη υπερσυμμετρικών θεωριών στο πλέγμα βρίσκεται ακόμα σε πολύ προκαταρκτικό στάδιο αφού υπάρχουν πολλά σημαντικά ερωτήματα τα οποία πρέπει πρώτα να απαντηθούν. Μερικά από αυτά είναι η βαθμονόμηση των παραμέτρων της διακριτοποιημένης Λαγκρανζιανής (με τρόπο τέτοιο, ούτως ώστε να ανακτήσει η Υπερσυμμετρία στο συνεχές), η επανακανονικοποίηση των κβαντικών πεδίων της θεωρίας, η μελέτη σύνθετων τελεστών (composite operators) καθώς και της πρόσμιξης ανάμεσα τους, την οποία επιφέρουν κβαντικές διορθώσεις.

Η διπλωματική αυτή εργασία ασχολείται με τη διαταρακτική μελέτη υπερσυμμετρικών θεωριών στο πλέγμα με στόχο να υπολογιστούν συναρτήσεις επανακανονικοποίησης διαφόρων φερμιονικών ρευμάτων. Για το σκοπό αυτό περιγράφεται αρχικά στο κεφάλαιο 1 η κατάστρωση διαφόρων θεωριών πεδίου στο πλέγμα όπως του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου, του φερμιονικού πεδίου, της QED και της QCD. Στη συνέχεια, περιγράφεται στο κεφάλαιο 2 η θεωρία διαταραχών στο πλέγμα. Συγκεκριμένα, μελετώνται τα διαγράμματα Feynman που προκύπτουν από το ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης στην θεωρία ϕ^3 με στόχο να υπολογιστούν συναρτήσεις συσχετισμού. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Υπερσυμμετρίας και γίνεται κατασκευή υπερσυμμετρικών βαθμίδας. Στο κεφάλαιο 4 διερευνάται η μορφή των υπερσυμμετρικών θεωριών στο πλέγμα και στο τέλος γίνεται παρουσίαση των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης διαφόρων φερμιονικών ρευμάτων στη θεωρία QCD και SYM. Επίσης γίνεται παράθεση ενός παραρτήματος στο οποίο δίνεται ο συμβολισμός και επεξηγείται η άλγεβρα των σπινόρων που χρησιμοποιούνται στις υπερσυμμετρικές θεωρίες.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα πρώτα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, Δρ. Παναγόπουλο Χάρη για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της δουλειάς αυτής.

Ευχαριστώ επίσης την οικογένεια μου για την υποστήριξη και συμπαράσταση που μου προσέφεραν κατά την διάρκεια των σπουδών μου και γενικά της ζωής μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	i
Ευχαριστίες	iii
1 Θεωρίες βαθμίδας στο πλέγμα	1
1.1 Το ελεύθερο βαθμωτό πεδίο	1
1.2 Το φερμιονικό πεδίο	4
1.3 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED)	6
1.4 Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD)	8
1.5 Επιπλέον όροι στις δράσεις της QED και QCD	10
2 Θεωρία διαταραχών στο πλέγμα	13
2.1 Εισαγωγή στο ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης	13
2.2 Ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης στην θεωρία ϕ^3	14
3 Υπερσυμμετρία	18
3.1 Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία	18
3.2 Η άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας και οι αναπαράστασεις της	20
3.3 Βαθμωτή multiplet	24
3.4 Υπερπεδία και Υπερχώρος	25
3.5 Χειραλικά υπερπεδία	27
3.6 Διανυσματικά υπερπεδία	29
3.7 Υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας	31
4 Υπερσυμμετρικές θεωρίες στο πλέγμα	37
4.1 Κίνητρα για μελέτη υπερσυμμετρικών θεωριών στο πλέγμα	37
4.2 Υπερσυμμετρική SU(2) και SU(3) Κβαντική Χρωμοδυναμική (SQCD) στο πλέγμα	38
4.2.1 SU(2) θεωρία βαθμίδας	38
4.2.2 SU(3) θεωρία βαθμίδας	41
4.3 Όροι των Λαγκρανζιανών της SQED και SQCD εκτός της βαθμίδας Wess-Zumino	42
4.4 Υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills (SYM) στο πλέγμα	44

4.5 Επανακανονικοποίηση διγραμμικών φερμιονικών τελεστών σε ένα βρόχο στις θεωρίες QCD και SYM στο πλέγμα	46
Επίλογος	52
Παραρτήματα	53
A Συμβολισμός και άλγεβρα σπινόρων	53
Βιβλιογραφία	56

Κεφάλαιο 1

Θεωρίες βαθμίδας στο πλέγμα

1.1 Το ελεύθερο βαθμωτό πεδίο

Ένα είδος πεδίου που συναντάται στην φύση είναι το βαθμωτό πεδίο το οποίο είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Η κλασσική εξίσωση του βαθμωτού πεδίου $\phi(x)$ όπως δίνεται στο [1]

$$(\square + M^2)\phi(x) = 0 \quad (1.1)$$

μπορεί να εξαχθεί μέσω της αρχής της ελάχιστης δράσης από την δράση

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x)(\square + M^2)\phi(x) \quad (1.2)$$

χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange.

Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίων διάφορα φυσικά μεγέθη μπορούν να εκφραστούν μέσω συναρτήσεων Green οι οποίες είναι αναμενόμενες τιμές στο κενό από γινόμενα πεδίων και παραγώγων τους. Είναι επομένως χρήσιμο να υπολογιστεί η ακόλουθη συναρτησιακή αναπαράσταση της συνάρτησης Green,

$$\langle \phi(x)\phi(y)\dots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi[\phi(x)\phi(y)\dots] e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}} \quad (1.3)$$

Η δράση S_E είναι η δράση του βαθμωτού πεδίου στον Ευκλείδιο χώρο και δίνεται από την σχέση

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x)(-\square + M^2)\phi(x) \quad (1.4)$$

Το γεγονός ότι εκφράστηκε η δράση στον Ευκλείδειο χώρο εξασφαλίζει την φθίνουσα συμπεριφορά του εκθετικού $e^{-S_E[\phi]}$. Έτσι αποφεύγεται η ταλαντωτική συμπεριφορά που εμφανίζει το εκθετικό αυτό στον χώρο Minkowski και η οποία επιφέρει αστάθεια στους αριθμητικούς υπολογισμούς της συνάρτησης Green.

Το ολοκλήρωμα διαδρομής (1.3) μπορεί να αποκτήσει μια μαθηματική ερμηνεία αν ο χωρόχρονος διακριτοποιηθεί σε ένα 4-διάστατο πλέγμα σταθεράς a στο οποίο κάθε σημείο αντιστοιχεί στην τετράδα αριθμών $n = n_1, n_2, n_3, n_4$. Η διακριτοποίηση αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσω των σχέσεων:

$$x_\mu \rightarrow n_\mu a \quad (1.5a)$$

$$\phi \rightarrow \phi(na) \quad (1.5b)$$

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_n \quad (1.5c)$$

$$\square\phi(x) \rightarrow \frac{1}{a^2} \hat{\square}\phi(na) \quad (1.5d)$$

$$\hat{\square}\phi(x) = \sum_{\mu=1}^4 [\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na)] \quad (1.5e)$$

$$\mathcal{D}\phi \rightarrow \prod_n d\phi(na) \quad (1.5f)$$

εδώ $\hat{\mu} \equiv \hat{e}_\mu$, όπου \hat{e}_μ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην μ -διεύθυνση. Τώρα, για να εξαχθεί ένα ολοκλήρωμα διαδρομής με αδιάστατες ποσότητες ορίζονται

$$\hat{\phi}_n = a\phi(na) \quad (1.6a)$$

$$\hat{M} = aM \quad (1.6b)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις διακριτοποίησης (1.5) και τις αδιάστατες ποσότητες (1.6) η σχέση (1.3) γίνεται

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \dots \rangle = \frac{\int \prod_\ell d\hat{\phi}_\ell \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \dots e^{-S_E[\hat{\phi}]}}{\int \prod_\ell d\hat{\phi}_\ell e^{-S_E[\hat{\phi}]}} \quad (1.7a)$$

όπου

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m \quad (1.7b)$$

με K_{nm} που δίνεται από τη σχέση

$$K_{nm} = - \sum_{\mu>0} [\delta_{m,n+\hat{\mu}} + \delta_{m,n-\hat{\mu}} - 2\delta_{mn}] + \hat{M}^2 \delta_{mn} \quad (1.7c)$$

Η δράση S_E φαίνεται ότι δεν εξαρτάται από τη σταθερά πλέγματος και είναι αδιάστατη. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι στο συνεχές όριο παράγεται η γνωστή κλασική δράση για το βαθμωτό πεδίο.

Τώρα, εξαιτίας του θεωρήματος του Wick ισχύει ότι

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = K^{-1}_{nm} \quad (1.8)$$

όπου ο αντίστροφος πίνακας K^{-1} ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\sum_{\ell} K_{n\ell} K^{-1}_{\ell m} = \delta_{nm} \quad (1.9)$$

Για να υπολογιστεί το στοιχείο K^{-1}_{nm} πρέπει να εκφραστεί η ποσότητα δ_{nm} στον χώρο των ορμών, να εισαχθεί στη σχέση (1.7c) και στη συνέχεια να γίνει ένα ansatz για την ποσότητα K^{-1}_{nm} . Στο τέλος παράγεται η σχέση:

$$\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = K^{-1}_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(n-m)}}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{\hat{k}_{\mu}}{2} + \hat{M}^2} \quad (1.10)$$

Το όριο της (1.10) στο συνεχές μπορεί να βρεθεί ανταλλάσσοντας τις αδιάστατες ποσότητες $\hat{\phi}, \hat{M}$ με τις αντίστοιχες ποσότητες με διαστάσεις και παίρνοντας το όριο $a \rightarrow 0$ κρατώντας τις ποσότητες $M, \phi, x = na$ και $y = na$ σταθερές. Μετά από αυτή τη διαδικασία προκύπτει η σχέση

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = K^{-1}_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + M^2} \quad (1.11)$$

Στην περίπτωση του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου η διαδικασία η οποία χρησιμοποιήθηκε για να βρεθεί το συνεχές όριο του ολοκληρώματος διαδρομής δίνει την σωστή σχέση. Όμως αυτή ήταν μια απλή διαδικασία που δεν καταλήγει σε όλες τις περιπτώσεις στα αναμενόμενα αποτελέσματα. Αυτό συμβαίνει επειδή σε θεωρίες αλληλεπίδρασης διάφορες παράμετροι δεν αντιστοιχούν σε φυσικές ποσότητες και επομένως δεν μπορούν να κρατηθούν σταθερές όταν η πλεγματική

σταθερά τείνει στο μηδέν. Στις περιπτώσεις αυτές θα μπορούσε όμως να γίνει αριθμητικός υπολογισμός της διακριτοποιημένης σχέσης (1.7) έχοντας υπόψη ότι πρέπει να αναπαράγεται η γνωστή φυσική στο όριο του συνεχούς.

1.2 Το φερμιονικό πεδίο

Στην Θεωρία Κβαντικών Πεδίων το φερμιονικό πεδίο είναι το πεδίο το οποίο έχει σαν κβάντα φερμιόνια. Ένα παράδειγμα φερμιονικού πεδίου είναι το πεδίο Dirac που περιγράφει φερμιόνια με σπιν $\frac{1}{2}$. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα διαδρομής της συνάρτησης Green με φερμιόνια ψ και αντιφερμιόνια $\bar{\psi} (\equiv \psi^\dagger \gamma^0)$ παίρνει την μορφή

$$\langle \psi_\alpha(x) \cdots \bar{\psi}_\beta(y) \cdots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi (\psi_\alpha(x) \cdots \bar{\psi}_\beta(y) \cdots) e^{-S_F^E}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_F^E}} \quad (1.12)$$

Οι δείκτες α και β δείχνουν την συνιστώσα των τετραδιάστατων πεδίων ψ και $\bar{\psi}$. Η δράση S_F^E είναι η δράση του πεδίου Dirac στον Ευκλείδειο χώρο που δίνεται από την σχέση

$$S_F^E = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu^E \partial_\mu + M) \psi(x) \quad (1.13)$$

Οι πίνακες γ_μ^E σχετίζονται με τους πίνακες γ_μ μέσω των σχέσεων $\gamma_4^E = \gamma^0$ και $\gamma_i^E = -i\gamma^i$.

Για να εισαχθεί ένα χωροχρονικό πλέγμα με σταθερά πλέγματος a πρέπει να χρησιμοποιηθούν διακριτοποιημένες σχέσεις και αδιάστατες ποσότητες κατ' αναλογία με τις σχέσεις (1.5) και (1.6) του προηγούμενου υποκεφαλαίου. Σαν αποτέλεσμα η διακριτοποιημένη δράση γράφεται ως

$$S_F^E = \sum_{\substack{n,m \\ \alpha,\beta}} \bar{\psi}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}(n, m) \hat{\psi}_\beta(m) \quad (1.14a)$$

όπου

$$K_{\alpha\beta}(n, m) = \sum_\mu \frac{1}{2} (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} [\delta_{m, n+\hat{\mu}} - \delta_{m, n-\hat{\mu}}] + \hat{M} \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \quad (1.14b)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το βαθμωτό πεδίο η συνάρτηση Green παίρνει την μορφή

$$\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{2\pi^4} \frac{[-i \sum \gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \quad (1.15a)$$

με \tilde{p}_μ να δίνεται από

$$\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(p_\mu a) \quad (1.15b)$$

Αν στο όριο $a \rightarrow 0$ γίνει η μετατροπή $\tilde{p}_\mu \rightarrow p_\mu$ τότε η σχέση (1.15a) αναπαράγει την σωστή συνάρτηση Green. Όμως αυτή η μετατροπή δεν μπορεί να γίνει επειδή στα άκρα της ζώνης Brillouin το \tilde{p}_μ παίρνει μια πεπερασμένη τιμή που δεν ισούται με το p_μ . Συνολικά υπάρχουν 2^d τέτοιες συνεισφορές στην συνάρτηση Green, όπου d είναι οι διαστάσεις του χωρόχρονου. Για κάθε επιπλέον διάσταση οι συνεισφορές διπλασιάζονται και γι' αυτό λέγεται ότι υπάρχει το πρόβλημα του διπλασιασμού. Κάθε μια από αυτές τις συνεισφορές αντιστοιχεί σε ένα διαδότη ενός φερμιονίου. Έτσι, παρουσιάζονται στο πλέγμα τεχνητά φερμιόνια που δεν εμφανίζονται στο όριο του συνεχούς.

Αυτό το πρόβλημα δεν επιτρέπει την δημιουργία δράσεων στο πλέγμα που εμπλέκουν φερμιόνια. Ένας τρόπος για να ξεπεραστεί αυτό είναι να χρησιμοποιηθούν τα φερμιόνια Wilson, δηλαδή να εισαχθεί ο πιο κάτω όρος στην δράση (1.14a)

$$S_F^{(W)} = S_F^E - \frac{r}{2} \sum_n \bar{\psi}(n) \hat{\square} \psi(n) \quad (1.16)$$

όπου r είναι η παράμετρος του Wilson. Ο επιπλέον όρος μπορεί να προστεθεί επειδή στο όριο του συνεχούς εξαφανίζεται. Όμως δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς της συμμετρίας χειρός και έτσι στο πλέγμα παραβιάζεται αυτή η συμμετρία παρόλο που στο συνεχές διατηρείται. Η νέα συνάρτηση Green γράφεται

$$\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{2\pi^4} \frac{[-i \sum \gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M(p)]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M(p)^2} e^{ip(x-y)} \quad (1.17a)$$

με \tilde{p}_μ να δίνεται από την (1.15b) και

$$M(p) = M + \frac{2r}{a} \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{p_\mu a}{2} \right) \quad (1.17b)$$

Φαίνεται ότι στα άκρα της ζώνης Brillouin ο όρος $M(p)$ απειρίζεται και έτσι δεν υπάρχουν επιπλέον συνεισφορές στην συνάρτηση Green. Έτσι λύνεται το πρόβλημα του διπλασιασμού με τίμημα να παραβιάζεται η συμμετρία χειρός.

1.3 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED)

Η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED) είναι η σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίου που περιγράφει τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Είναι μια αβελιανή θεωρία βαθμίδας που ανήκει στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Η δράση της QED στο συνεχές μπορεί να εξαχθεί ξεκινώντας από την δράση του πεδίου Dirac (1.24) και απαιτώντας τοπική συμμετρία βαθμίδας. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας ένα τετραδιάνυσμα $A_\mu(x)$ και μια συναλλοίωτη παράγωγο D_μ που ορίζεται ως

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.18)$$

Η δράση που προκύπτει περιγράφει την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη. Πρέπει όμως να προστεθεί και ένας κινηματικός όρος που περιγράφει την διάδοση του $A_\mu(x)$. Ο όρος αυτός πρέπει να είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και βαθμίδας. Τελικά προκύπτει η εξής δράση στον Ευκλείδιο χώρο

$$S_{QED}^E = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma_\mu^E D_\mu + M) \psi \quad (1.19)$$

όπου $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu\nu} A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ είναι ο ηλεκτρομαγνητικός ταυνοστής. Οι δείκτες μ και ν παίρνουν τιμές από 1 μέχρι 4 και όπου iA_4 αντιστοιχεί στο A^0 του χώρου Minkowski.

Κατ' αναλογία με την διαδικασία για την εξαγωγή της δράσης της QED στο συνεχές, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η διακριτοποιημένη δράση των φερμιονίων Wilson στο πλέγμα και στη συνέχεια να απαιτηθεί και πάλι συμμετρία βαθμίδας. Έτσι προκύπτει η δράση

$$\begin{aligned} S_F^{(W)}[\psi, \bar{\psi}, U] = & (\hat{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) \\ & + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}}^\dagger \psi(n)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Στην πιο πάνω σχέση χρησιμοποιούνται αδιάστατες ποσότητες αλλά παραλήφθηκε το σύμβολο " \wedge " για απλότητα. Η συμμετρία βαθμίδας εξασφαλίζεται χάρη στον σύνδεσμο $U_{n,n+\hat{\mu}}$ που είναι στοιχείο της ομάδας $U(1)$ και ορίζεται ως

$$U_{\mu} \equiv U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{ieaA_{\mu}(n+\frac{\hat{\mu}}{2})} \quad (1.21)$$

Για να εξαχθεί ο κινηματικός όρος της δράσης της QED στο πλέγμα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι σύνδεσμοι αφού είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Ένας εύκολος τρόπος για να εισαχθούν οι συνδέσμοι στην δράση είναι να κατασκευαστούν γινόμενα από αυτούς. Έτσι ορίζεται η πλακέττα $U_{\mu\nu}$ στο $\mu - \nu$ επίπεδο ως εξής

$$U_{\mu\nu}(n) = U_{\mu}(n)U_{\nu}(n+\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(n+\hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(n) \quad (1.22)$$

Ως αποτέλεσμα ο κινηματικός όρος της δράσης γράφεται

$$S_G[U] = \frac{1}{e^2} \sum_P [1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^{\dagger})] \quad (1.23)$$

όπου το άθροισμα ως προς P αφορά όλες τις πλακέττες.

Άρα, η συνολική δράση της QED δίνεται από

$$\begin{aligned} S_{QED}[U, \psi, \hat{\psi}] &= \frac{1}{e^2} \sum_P [1 - \frac{1}{2}(U_P + U_P^{\dagger})] \\ &+ (\hat{M} + 4r) \sum_{\nu} \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_{\mu})U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n+\hat{\mu}) \\ &+ \bar{\psi}(n+\hat{\mu})(r + \gamma_{\mu})U_{n,n+\hat{\mu}}^{\dagger}\psi(n)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

Η πιο πάνω δράση μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι σωστή αφού στο όριο $a \rightarrow 0$ αναπαράγει την σχέση (1.19). Με τη δράση αυτή μπορεί να υπολογιστεί οποιαδήποτε συνάρτηση συσχετισμού που περιέχει συνδέσμους, φερμιόνια και αντιφερμιόνια.

$$\begin{aligned} < \psi_{\alpha}(n) \cdots \bar{\psi}_{\beta}(m) \cdots U_{\mu}(N) \cdots > = \\ & \frac{\int DU D\bar{\psi} D\psi (\psi_{\alpha}(n) \cdots \bar{\psi}_{\beta}(m) \cdots U_{\mu}(N) \cdots) e^{-S_{QED}}}{\int DU D\bar{\psi} D\psi e^{-S_{QED}}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

όπου $U_{\mu}(n) = e^{i\phi_{\mu}(n)}$ και $DU \equiv \prod_{n,\mu} d\phi_{\mu}(n)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παράμετροι \hat{M} και e που εμφανίζονται στην QED δεν αντιστοιχούν στις φυσικές ποσότητες της μάζας και του ηλεκτρικού φορτίου αλλά σε

άγνωστες παραμέτρους που πρέπει να προσδιοριστούν με τρόπο ώστε οι συναρτήσεις Green να συνάδουν με τη φυσική μάζα και το φυσικό φορτίο του ηλεκτρονίου.

Έτσι ολοκληρώνεται η διαδικασία διακριτοποίησης της δράσης της QED στο πλέγμα. Αυτό που ξεχωρίζει την διαδικασία αυτή από την αντίστοιχη διακριτοποίηση στην ελεύθερη θεωρία φερμιονίων και στη θεωρία βαθμωτού πεδίου ήταν η ανάγκη εισαγωγής των συνδέσμων $U_\mu(n)$ ούτως ώστε να εξασφαλιστεί το αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Η διατήρηση της συμμετρίας αυτής στη διακριτοποιημένη θεωρία είναι απαραίτητο συστατικό για να αποδειχθεί ότι η θεωρία είναι κανονικοποιήσιμη. [2]

1.4 Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD)

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD) είναι η κβαντική θεωρία πεδίου που περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις σωματιδίων όπως τα quarks και τα γλουόνια. Είναι μια μη-αβελιανή θεωρία βαθμίδας με συμμετρία την ομάδα $SU(3)$. Στην QCD η ιδιότητα του χρώματος των σωματιδίων είναι η αντίστοιχη ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου που υπάρχει στην QED. Επίσης, οι φορείς της ισχυρής δύναμης είναι τα γλουόνια. Η διακριτοποιημένη δράση των φερμιονίων Wilson (1.20) η οποία έχει ομάδα συμμετρίας την $U(1)$ μπορεί να γραφτεί στην περίπτωση της ομάδας $SU(N)$ ως εξής

$$\begin{aligned} S_F^{(W)}[\psi, \bar{\psi}, U] &= (\hat{M}_0 + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \underline{\psi}(n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n, \hat{\mu}} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) \underline{U}_\mu \underline{\psi}(n + \hat{\mu}) \\ &\quad + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) \underline{U}_\mu^\dagger \underline{\psi}(n)] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Η πιο πάνω δράση περιέχει τις ποσότητες ψ και $\bar{\psi}$, οι οποίες είναι διανύσματα στήλης και σειράς με N στοιχεία που ορίζονται ως εξής

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad (\bar{\psi} = \bar{\psi}^1, \dots, \bar{\psi}^N)$$

Τα στοιχεία ψ^α είναι τα γνωστά πεδία Dirac, αλλά με ένα χρωματικό δείκτη α . Επίσης ο σύνδεσμος \underline{U}_μ είναι στοιχείο της ομάδας $SU(N)$ στη θεμελιώδη αναπαράσταση.

Τώρα, για να βρεθεί ο κινηματικός όρος της δράσης ορίζεται η πλακέτα $U_{\mu\nu}(n)$ η οποία γράφεται:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (1.27)$$

Το ίχνος της πλακέτας $U_{\mu\nu}(n)$ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Έτσι, κατ' αναλογία με την (1.23) ο κινηματικός όρος της δράσης της QCD γράφεται:

$$S_G(U) = c \text{Tr} \sum_{\substack{n \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \quad (1.28)$$

Είναι γνωστό ότι στη φύση υπάρχουν τρία χρώματα και επομένως η δράση της QCD έχει συμμετρία την ομάδα SU(3). Γι' αυτό τον λόγο ορίζεται ο σύνδεσμος ως:

$$U_\mu(n) = e^{ig_0 a A_\mu(n)} \quad (1.29)$$

όπου a , είναι η σταθερά του πλέγματος, g_0 μια σταθερά και $A_\mu(n)$ ένας ερμιτιανός πίνακας που ανήκει στην άλγεβρα Lie της SU(3). Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό του συνδέσμου και αναπτύσσοντας τη φερμιονική δράση (1.26) σε δυνάμεις της σταθεράς πλέγματος αποδεικνύεται ότι στο όριο $a \rightarrow 0$ αναπαράγεται η συνεχής φερμιονική δράση:

$$S_F^{(cont.)} = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu (\partial_\mu + ig_0 A_\mu) + M_0) \psi(x) \quad (1.30)$$

Έχοντας στόχο να βρεθεί ο κινηματικός όρος της συνεχούς δράσης, ορίζεται ο ταυυστής $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ μέσω της σχέσης:

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{ig_0 a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}(n)} \quad (1.31)$$

Αν αναπτυχθούν οι συνδέσμοι του γινομένου (1.27) γύρω από το σημείο n , χρησιμοποιηθεί η σχέση (1.31) και η εξίσωση Baker-Campbell-Hausdorff τότε μπορεί ναδειχθεί ότι στο όριο του συνεχούς ισχύει:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \xrightarrow{a \rightarrow 0} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_0 [A_\mu, A_\nu] \quad (1.32)$$

Στην πιο πάνω σχέση ο ταυυστής $F_{\mu\nu}$ είναι ο γλουονικός ταυυστής της συνεχούς QCD. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό και τον ορισμό του ταυυστή $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ (1.31),

ο κινηματικός όρος της δράσης (1.28) παίρνει την πιο κάτω μορφή στο όριο του συνεχούς:

$$S_G \longrightarrow c \frac{g_0^2}{2} S_G^{(cont.)}$$

όπου

$$S_G^{(cont.)} = \frac{1}{2} Tr \int d^4x \underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}_{\mu\nu} \quad (1.33)$$

Ο όρος $S_G^{(cont.)}$ είναι το γνωστό κινητικό μέρος της δράσης της QCD και επομένως πρέπει να οριστεί $c = \frac{2}{g_0^2}$ ούτως ώστε να υπάρχει συμφωνία της δράσης στο πλέγμα με αυτή του συνεχούς. Ο όρος αυτός παρουσιάζει ενδιαφέρον επειδή περιέχει γινόμενα γλουονικών πεδίων μέχρι και τετάρτου βαθμού.

Έτσι τελειώνει η διακριτοποίηση της QCD στο πλέγμα. Περιληπτικά, η θεωρία αυτή ήταν μια επέκταση της QED στο πλέγμα. Απλά έγινε αντικατάσταση του πεδίου Dirac ψ από τρία πεδία χρώματος ψ^a και του σύνδεσμου U_μ που είναι στοιχείο της ομάδας $U(1)$ από τον σύνδεσμο U_μ που είναι στοιχείο της ομάδας $SU(3)$.

1.5 Επιπλέον όροι στις δράσεις της QED και QCD

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδας επιφέρουν προβλήματα απειρισμού σε συναρτησιακά ολοκληρώματα τόσο στην θεωρία της QED, όσο και στην θεωρία της QCD.

Συγκεκριμένα, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \quad (1.34)$$

που περιέχει την δράση $S[A]$ της QED, απειρίζεται διότι γίνεται ολοκλήρωση σε άπειρες ισοδύναμες διατάξεις πεδίου. Οι διατάξεις θεωρούνται ισοδύναμες όταν σχετίζονται μέσω ενός μετασχηματισμού βαθμίδας και συνεπώς αντιστοιχούν στην ίδια τιμή του $e^{iS[A]}$. Όμως αυτό το πρόβλημα μπορεί να διορθωθεί περιορίζοντας το συναρτησιακό ολοκλήρωμα, ούτως ώστε κάθε διάταξη να ολοκληρώνεται μόνο μια φορά. Μπορεί να αποδειχθεί [3] ότι αυτό επιτυγχάνεται απλώς προσθέτοντας τον όρο $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$ στην Λαγκρανζιανή της QED, όπου ξ είναι μια τυχαία παράμετρος. Ο όρος αυτός ονομάζεται όρος gauge-fixing.

Στην περίπτωση της QCD, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα

$$\int \mathcal{D}A \exp\left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^\alpha)^2\right)\right] \quad (1.35)$$

είναι αυτό που απειρίζεται λόγω της ολοκλήρωσης ως προς ισοδύναμες διατάξεις. Για να διορθωθεί το πρόβλημα πρέπει, όπως και στην περίπτωση της QED, να προστεθεί ο όρος $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$ στην Λαγκρανζιανή της QCD. Αυτή την φορά όμως πρέπει να προστεθεί και ο καινούργιος όρος $\bar{c}^\alpha(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c$, όπου D_μ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος που ορίζεται ως

$$(D_\mu\phi)_\alpha = \partial_\mu\phi_\alpha + gf^{abc}A_\mu^b\phi_c \quad (1.36)$$

Επίσης, τα πεδία c και \bar{c} είναι τα λεγόμενα Faddeev-Popov ghosts. Τα ghosts είναι βαθμωτά και αντιμετατιθέμενα πεδία που δεν αντιστοιχούν σε φυσικά σωματίδια, αλλά αποτελούν μια μαθηματική κατασκευή για την αντιμετώπιση του προβλήματος του απειρισμού βαθμίδας. Δεν υπακούουν στο θεώρημα spin-statistics αλλά αυτό δεν είναι παράδοξο επειδή δεν είναι φυσικά σωματίδια.

Κατ' αναλογία με τον όρο gauge fixing της συνεχούς QCD προστίθεται στην αντίστοιχη δράση στο πλέγμα ο όρος [4]

$$S_{gauge\,fixing} = \frac{a^2}{2\xi} \sum_n \left[\sum_{\mu,\alpha} (A_{n\mu}^\alpha - A_{n-\hat{\mu},\mu}^\alpha) \right] \quad (1.37)$$

Ο όρος για τα Faddeev-Popov ghosts στο πλέγμα παίρνει την μορφή

$$S_{FP} = -a^2 \sum_{n,\mu} (\bar{c}_{n+\hat{\mu}}^\alpha - \bar{c}_n^\alpha) \{ E_{ab}^{-1}(g_0 a A_{n\mu}) c_n^b - E_{b\alpha}^{-1}(g_0 a A_{n\mu}) c_{n+\hat{\mu}}^b \} \quad (1.38)$$

Εδώ, ο πίνακας $E_{ab}(\phi)$ ορίζεται σαν

$$E_{ab}(\phi) = \left(\frac{e^{i\tilde{\phi}} - 1}{i\tilde{\phi}} \right)_{ab} \quad (1.39)$$

όπου $\tilde{\phi} = \sum_\alpha \phi^\alpha \tilde{T}^\alpha$, με \tilde{T}^α τους γεννήτορες στην προσαρτημένη αναπαράσταση.

Στο πλέγμα εμφανίζεται και ένας επιπλέον όρος που οφείλεται στην Ιακωβιανή του πίνακα που προκύπτει από το μέτρο ολοκλήρωσης των πλακετών dU . Αυτός ο όρος

γράφεται

$$S_{measure} = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} Tr \ln \frac{2(1 - \cos g_0 a \tilde{A}_{n\mu})}{(g_0 a \tilde{A}_{n\mu})^2} \quad (1.40)$$

Άρα η ολική δράση της QCD στο πλέγμα δίνεται από την σχέση

$$S_{tot} = S_F^{(W)} + S_G + S_{gaugefixing} + S_{FP} + S_{measure} \quad (1.41)$$

με $S_F^{(W)}$ και S_G να δίνονται από την (1.26) και (1.28) αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία διαταραχών στο πλέγμα

2.1 Εισαγωγή στο ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης

Η Κβαντική Χρωμοδυναμική είναι μια θεωρία που χαρακτηρίζεται από ασυμπτωτική ελευθερία. Δηλαδή όταν τα σωματίδια που αλληλεπιδρούν ισχυρά βρεθούν σε μικρές αποστάσεις, τότε η τιμή της σταθεράς σύζευξης μειώνεται. Αντίθετα, όταν η απόσταση μεγαλώνει τότε και η σταθερά σύζευξης γίνεται μεγάλη. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν μπορούν τα quarks που βρίσκονται σε ένα βαρυόνιο να διαχωριστούν. Μια άλλη συνέπεια που απορρέει από την ασυμπτωτική ελευθερία, είναι η δυνατότητα χρησιμοποίησης της διαταρακτικής θεωρίας ασθενούς σύζευξης σε μικρές αποστάσεις χάρις στη μικρή τιμή της σταθεράς σύζευξης.

Η θεωρία διαταραχών στο πλέγμα είναι χρήσιμη επειδή δίνει την δυνατότητα μελέτης της ανάκτησης κάποιων συμμετριών στο όριο $a \rightarrow 0$ οι οποίες παραβιάζονται στο πλέγμα, όχι όμως στο συνεχές, όπως οι συμμετρίες της ομάδας Poincaré. Αντίθετα, μια μη-διαταρακτική ανάλυση θα ήταν πολύ δύσκολη. Επίσης η θεωρία διαταραχών εξασφαλίζει την εμφάνιση κάποιων ανωμαλιών στο πλέγμα που εμφανίζονται και στο συνεχές όπως την ανωμαλία Adler-Bell-Jackiw (ABJ) της QED. Ακόμη, στο πλέγμα είναι δυνατόν να υπολογιστεί το συνεχές όριο διαφόρων παρατηρούμενων ποσοτήτων, όπως της παραμέτρου Λ . Έτσι, χρησιμοποιώντας τις ανάλογες τιμές του Λ και των μαζών των quark στο συνεχές μπορούν να προβλεφθούν και άλλα φυσικά φαινόμενα.

Ωστόσο, στο πλέγμα εμφανίζονται επιπρόσθετοι όροι που δεν έχουν συνεχές ανάλογο. Άρα πρέπει κατά την κατασκευή της δράσης στο πλέγμα να διασφαλιστεί ότι στο όριο $a \rightarrow 0$, αναπαράγεται η συνεχής δράση και τα αναμενόμενα διαταρακτικά αποτελέσματα. Κατ' επέκταση, μια σημαντική χρήση της θεωρίας διαταραχών είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης που απαιτούνται για την εξεύρεση φυσικών μεγεθών μέσα από προσομοιώσεις. Συχνά, ο υπολογισμός των συναρτήσεων αυτών δεν μπορεί να γίνει παρά μόνο διαταρακτικά.

Στη συνέχεια θα μελετηθούν τα διαγράμματα Feynman που προκύπτουν κατά την διακριτοποίηση του βαθμωτού πεδίου. Συγκεκριμένα θα μελετηθεί η απλούστερη αλλά μη τετριμμένη βαθμωτή θεωρία, η ϕ^3 .

2.2 Ανάπτυγμα ασθενούς σύζευξης στην θεωρία ϕ^3

Η δράση της θεωρίας ϕ^3 γράφεται

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square + M_0^2) \phi(x) + \frac{g_0}{3!} \int d^4x (\phi(x))^3 \quad (2.1)$$

Η διακριτοποιημένη μορφή της πιο πάνω δράσης δίνεται από την σχέση

$$S[\hat{\phi}] = \sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m + \frac{\hat{g}_0}{3!} \sum_n \hat{\phi}_n^3 \quad (2.2)$$

Άρα το συναρτησιακό ολοκλήρωμα που συνδέει τα πεδία ϕ_n και ϕ_m γράφεται

$$\langle \phi_n \phi_m \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi_n \phi_m \exp \left[\sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m + \frac{\hat{g}_0}{3!} \sum_n \hat{\phi}_n^3 \right] \quad (2.3)$$

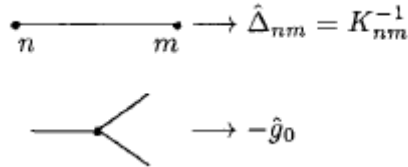
Αν γίνει ανάπτυγμα σε δυνάμεις της σταθεράς σύζευξης g_0 , το συναρτησιακό ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή

$$\langle \phi_n \phi_m \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi_n \phi_m \exp \left[\sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m \right] \left(1 - \frac{\hat{g}_0}{3!} \sum_n \hat{\phi}_n^3 + \frac{\hat{g}_0^2}{2!(3!)^2} \left(\sum_n \hat{\phi}_n^3 \right)^2 + \dots \right) \quad (2.4)$$

Η συνεισφορά του κάθε όρου του αναπτύγματος σε δυνάμεις του g_0 μπορεί να αναπαρασταθεί από τα διαγράμματα Feynman. Έτσι, για να υπολογιστεί η συνάρτηση συσχέτισης (2.4) πρέπει να αθροιστούν όλα τα διαγράμματα αυτά.

Δεδομένου ότι ο κάθε όρος στην (2.4) εμπλέκει ένα Γκαουσιανό εκθετικό πολλαπλασιασμένο με ένα πολυώνυμο, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει άμεσα σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Wick.

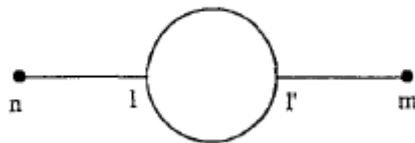
Τα διαγράμματα Feynman αποτελούνται από κορυφές αλληλεπίδρασης με σταθερά σύζευξης $-\hat{g}_0$ και από τους διαδότες $\hat{\Delta}_{nm} = K_{nm}^{-1}$ που έχουν την εξής γραφική αναπαράσταση:



ΣΧΗΜΑ 2.1: Απεικόνιση των κορυφών αλληλεπίδρασης και των διαδοτών των διαγραμμάτων Feynman

Υπάρχουν διαδότες δύο ειδών. Το πρώτο είδος είναι οι εξωτερικές γραμμές που συνδέουν ένα από τα πλεγματικά σημεία που εμφανίζονται στην συνάρτηση συσχέτισης με μια κορυφή. Το δεύτερο είδος είναι οι εσωτερικές γραμμές που συνδέουν 2 κορυφές.

Ένα διάγραμμα που αντιστοιχεί στο όρο τάξης g_0^2 του αναπτύγματος του συναρτησιακού ολοκληρώματος (1.28) είναι το εξής:



ΣΧΗΜΑ 2.2: Διάγραμμα τάξης g_0^2 του $\langle \phi_n \phi_m \rangle$

Από το θεώρημα Wick, ο όρος αυτός γράφεται

$$\langle \phi_n \phi_m \rangle_{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{l,l'} \hat{\Delta}_{nl} (\hat{\Delta}_{l'l'})^2 \hat{\Delta}_{l'm} \quad (2.5)$$

όπου η ποσότητα $\hat{\Delta}_{nm}$ αντιστοιχεί στον διαδότη του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου (1.10). Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιηθεί η αναπαράσταση της συνάρτησης δ του Dirac

$$\delta_P(k) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{-ink} \quad (2.6)$$

και η ιδιότητα

$$f(k) = \int_{BZ} \delta^{(4)}(k - k') f(k') d^4 k' \quad (2.7)$$

μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\langle \phi(n) \phi(m) \rangle_{(2)} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} G(k, k'; M, a) e^{ikn} e^{-ik'm} \quad (2.8a)$$

όπου

$$G(k, k'; M, a) = (2\pi)^4 \delta_P^{(4)}(k - k') \left[\frac{1}{\tilde{k}^2 + M^2} \Pi(k; M, a) \frac{1}{\tilde{k}^2 + M^2} \right] \quad (2.8b)$$

και

$$\Pi(k; M, a) = \frac{g_0^2}{2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\tilde{q}^2 + M^2][\widetilde{(k - q)^2 + M^2}]} \quad (2.8c)$$

Οι μεταβλητές με την περισπωμένη ορίζονται σαν

$$\tilde{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin \frac{p_\mu a}{2} \quad (2.9)$$

$$\tilde{p}^2 = \sum_{\mu=1}^4 \tilde{p}_\mu^2 \quad (2.10)$$

Οι διαδότες $1/(\tilde{k}^2 + M^2)$ αναπαράγουν τους συνεχείς διαδότες στο όριο $a \rightarrow 0$. Ακόμη, η ποσότητα $G(k, k'; M, a)$ αποκτά την ίδια μορφή με αυτή της συνεχούς θεωρίας. Επίσης φαίνεται ότι σε μεγάλες τιμές της ορμής q , όπου $\pi/a \rightarrow \infty$ η ποσότητα αυτή αποκτά λογαριθμική μορφή και άρα απειρίζεται. Έτσι, υπάρχει η λεγόμενη Ultraviolet (UV) singularity. Παρατηρείται όμως ότι στο πλέγμα αυτό το πρόβλημα δεν υπάρχει αφού η ολοκλήρωση περιορίζεται μόνο στην ζώνη Brillouin. Γι' αυτό το πλέγμα θεωρείται ένας UV ομαλοποιητής της θεωρίας. Ένα άλλο είδος ομαλοποίησης θα ήταν η διαστατική ομαλοποίηση. Παρόλο που αυτή είναι πιο εύκολη, δεν προσφέρει την δυνατότητα μη-διαταρακτικών υπολογισμών μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων. Αντίθετα, το πλέγμα δίνει αυτή την δυνατότητα.

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε πιο πάνω, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό πιο πολύπλοκων διαγραμμάτων Feynman. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να γίνεται ολοκλήρωση ως προς τις εσωτερικές ορμές των βρόχων και να γίνεται πολλαπλασιασμός με την σταθερά σύζευξης $-g_0/3!$ για κάθε κορυφή, με τον

παράγοντα που προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor της δράσης και με τον συνδυαστικό αριθμό του διαγράμματος που δίνεται από τον αριθμό όλων των δυνατών συνδυασμών των πεδίων που οδηγούν στο συγκεκριμένο διάγραμμα.

Κεφάλαιο 3

Υπερσυμμετρία

3.1 Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία

Στη φυσική, χρησιμοποιώντας απλά τις συμμετρίες ενός φυσικού συστήματος μπορούν να παρθούν αρκετές πληροφορίες γι' αυτό χωρίς να είναι γνωστοί οι φυσικοί νόμοι που το διέπουν. Σύμφωνα με το θεώρημα Noether, αν ένα σύστημα είναι αναλλοίωτο κάτω από κάποιους μετασχηματισμούς συμμετρίας τότε υπάρχει ένας αντίστοιχος νόμος διατήρησης. Για παράδειγμα οι νόμοι διατήρησης ενέργειας, ορμής και στροφορμής συνδέονται με το αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς χρονικής και χωρικής μετατόπισης και περιστροφής χώρου αντίστοιχα. Άρα οι συμμετρίες αφ'ενός πρέπει να αποτυπώνουν τις ιδιότητες της φύσης όπως αυτές αναδεικνύονται πειραματικά. Ταυτόχρονα, ορισμένες συμμετρίες είναι και απαραίτητες για την κατασκευή κβαντικών θεωριών χωρίς προβλήματα απειρισμού. Συγκεκριμένα, το Καθιερωμένο Πρότυπο βασίζεται στην ομάδα Lorentz, στην ομάδα $SU(3)_C$ για το χρώμα και στις ομάδες $SU(2)_W$ και $U(1)$ για τις ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Η συμμετρία $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)$ είναι μια συμμετρία που δρα σε ένα εσωτερικό χώρο. Από την άλλη, η θεωρία του Einstein για την βαρύτητα βασίζεται στην ομάδα Lorentz και συγκεκριμένα σε τοπικές χώρο-χρονικές συμμετρίες. [5]

Υπάρχει ένας ενδιαφέρων τρόπος να συνδυαστούν οι χώρο-χρονικές με τις εσωτερικές συμμετρίες, και αυτός είναι η Υπερσυμμετρία. Είναι γνωστό ότι οι συμμετρίες μπορούν να εκφραστούν μαθηματικά μέσω σχέσεων μετάθεσης. Η γενίκευση της έννοιας της συμμετρίας ούτως ώστε να περιλαμβάνει την χρήση σχέσεων μετάθεσης αλλά και αντιμετάθεσης έχει σαν αποτέλεσμα την κατασκευή

της Υπερσυμμετρίας. Με άλλα λόγια, οι γεννήτορες της Υπερσυμμετρίας αποτελούν μια άλγεβρα με μεταθέτες και αντιμεταθέτες η οποία είναι μια επέκταση της Poincare άλγεβρας Lie των θεωριών πεδίου. Στα πλαίσια μιας υπερσυμμετρικής θεωρίας γίνεται επέκταση και του τετραδιάστατου χώρου Minkowski σε ένα χώρο που περιέχει τις χωροχρονικές μεταβλητές αλλά και τις αντιμετατιθέμενες παραμέτρους $\theta, \bar{\theta}$. Αυτός ο χώρος καλείται υπερχώρος και σε αυτόν ορίζονται τα υπερπεδία. Συγκεκριμένα τα υπερπεδία είναι αναπτύγματα σε δυνάμεις του θ και $\bar{\theta}$ με συνιστώσες που αντιστοιχούν στα πεδία των σωματιδίων. Τα σωματίδια με σπιν 0 και $\frac{1}{2}$ εμπεριέχονται στα χειραλικά υπερπεδία, ενώ σωματίδια με σπιν 1 και $\frac{1}{2}$ στα διανυσματικά υπερπεδία. Οι υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας μπορούν να κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς που περιλαμβάνουν υπερπεδία. Λεπτομέρειες για τον υπερχώρο, τα υπερπεδία και τις υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας θα δοθούν στα επόμενα υποκεφάλαια.

Η Υπερσυμμετρία, αν όντως υπάρχει σε μια επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου προβλέπει την ύπαρξη υπερσυμμετρικών σωματιδίων που είναι ζευγάρια με τα υπόλοιπα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου και έχουν ίδια μάζα αλλά διαφορά $\frac{1}{2}$ στο σπιν. Ωστόσο, επειδή δεν παρατηρήθηκαν αυτά τα σωματίδια, η θεωρία αυτή αν όντως περιγράφει την φύση τότε πρέπει να παραβιάζεται. Όμως υπάρχουν αρκετοί λόγοι οι οποίοι καθιστούν χρήσιμη και σημαντική την μελέτη της. Συγκεκριμένα, προσφέρει ένα πλαίσιο για την ενοποίηση των ισχυρών με τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις σε ενέργειες της τάξης μεγέθους της ενέργειας Planck, $M_p = 10^{19} \text{ GeV}$. Επίσης, η Υπερσυμμετρία λύνει το πρόβλημα ιεραρχίας βαθμίδας, δηλαδή τις μεγάλες διαφορές κλίμακας που παρατηρούνται στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Ένας άλλος λόγος είναι το γεγονός ότι οι θεωρίες χορδών, οι οποίες αποτελούν τις πλέον υποσχόμενες θεωρίες κβαντικής βαρύτητας χαρακτηρίζονται αναγκαστικά από Υπερσυμμετρία. Ακόμη, επεκταμένα υπερσυμμετρικά μοντέλα μπορούν να εξηγήσουν την ηλεκτροασθενή βαρυογένεση. Τέλος μπορεί κάποιο υπερσυμμετρικό σωματίδιο να αποτελεί την σκοτεινή ύλη. Αντίθετα, το Καθιερωμένο Πρότυπο αντιμετωπίζει προβλήματα στο να εξηγήσει τα θέματα που αναφερθήκαν πιο πάνω. [6]

3.2 Η άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας και οι αναπαραστάσεις της

Η άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας αποδείχθηκε ότι είναι η μόνη διαβαθμισμένη άλγεβρα Lie των συμμετριών του πίνακα S , η οποία είναι συνεπής με σχετικιστική Κβαντική Θεωρία Πεδίων. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στο θεώρημα Coleman-Mandula, το οποίο ξεκινά από τις υποθέσεις:

- Ο πίνακας S βασίζεται σε μια τοπική, σχετικιστική κβαντική θεωρία πεδίων στον τετραδιάστατο χωρόχρονο.
- Υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός διαφορετικών σωματιδίων που σχετίζονται με τις καταστάσεις ενός σωματιδίου συγκεκριμένης μάζας
- Υπάρχει ένα χάσμα ενέργειας μεταξύ του κενού και των σωματιδιακών καταστάσεων

Το αποτέλεσμα που απορρέει από το θεώρημα είναι ότι η πιο γενική άλγεβρα Lie των συμμετριών του πίνακα S περιέχει τον τελεστή ορμής-ενέργειας P_m , τον γεννήτορα περιστροφών Lorentz M_{mn} και ένα πεπερασμένο αριθμό ερμιτιανών τελεστών B_i αναλλοίωτων κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz που ανήκουν στην άλγεβρα Lie μιας συμπαγούς ομάδας Lie.

Επιτρέποντας στην άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας να περιέχει τόσο αντιμετατιθέμενους όσο και μετατιθέμενους τελεστές και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Coleman-Mandula και τις ταυτότητες Jacobi αποδεικνύεται ότι η πιο

γενική άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας γράφεται [7]

$$\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0 \\
[P_m, Q_\alpha^L] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}L}] = 0 \\
[P_m, B_l] &= [P_m, X^{LM}] = 0 \\
\{Q_\alpha^L, \bar{Q}_{\dot{\alpha}M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m P_m \delta_M^L \\
\{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} X^{LM} \\
\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}L}, \bar{Q}_{\dot{\beta}M}\} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} X_{LM}^+ \\
[X^{LM}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}K}] &= [X^{LM}, Q_\alpha^K] = 0 \\
[X^{LM}, X^{KN}] &= [X^{LM}, B_l] = 0 \\
[B_l, B_m] &= i c_{lm}^k B_k \\
[Q_\alpha^L, B_l] &= S_l^L{}_M Q_\alpha^M \\
[\bar{Q}_{\dot{\alpha}L}, B^l] &= -S^{*l}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot{\alpha}M} \\
X^{LM} &= \alpha^{l,LM} B_l
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Οι ελληνικοί δείκτες $(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ των πιο πάνω τελεστών παίρνουν τιμές από ένα μέχρι δύο και αναφέρονται τους σπίνορες Weyl. Οι λατινικοί δείκτες (m, n, l) παίρνουν τιμές από ένα μέχρι τέσσερα και δηλώνουν τα τετραδιανύσματα Lorentz. Οι κεφαλαίοι δείκτες (L, M, K) αναφέρονται σε ένα εσωτερικό χώρο και παίρνουν τιμές από 1 μέχρι $N \geq 1$. Στα επόμενα κεφάλαια θα εξεταστεί η άλγεβρα για $N=1$, η οποία καλείται υπερσυμμετρική άλγεβρα. Σε $N > 1$ αντιστοιχούν οι εκτεταμένες υπερσυμμετρικές άλγεβρες. Το στοιχείο $\alpha^{l,LM}$ είναι αντισυμμετρικό ως προς τους δείκτες L και M και οι πίνακες α_k αναμιγνύουν τις αναπαραστάσεις S_l και $-S_l^*$. Τα στοιχεία $S_l^L{}_M$ είναι ερμιτιανά και αποτελούν αναπαράσταση του αθροίσματος \mathcal{A} μιας αβελιανής άλγεβρας και μιας ημιαπλής άλγεβρας. Τα στοιχεία X^{LM} ονομάζονται κεντρικά φορτία και αποτελούν μια αναλλοίωτη υποάλγεβρα της \mathcal{A} . Συγκεκριμένα, είναι στοιχεία της αβελιανής άλγεβρας και μετατίθενται με όλα τα στοιχεία της \mathcal{A} . Το B_l είναι και αυτό ερμιτιανό στοιχείο της άλγεβρας \mathcal{A} . Τέλος, οι τελεστές Q δρουν στον χώρο Hilbert με θετική και πεπερασμένη μετρική και οι ερμιτιανοί συζυγείς τους \bar{Q} ανήκουν στην ίδια άλγεβρα με αυτούς.

Τώρα, μπορούν να κατασκευαστούν αναπαραστάσεις της άλγεβρας της υπερσυμμετρίας που αντιστοιχούν σε καταστάσεις ενός σωματιδίου με μάζα, δηλαδή $P^2 = -M^2$, όπου P είναι το τετραδιάνυσμα ορμής του σωματιδίου. Στο σύστημα αναφοράς όπου $P_m = (-M, 0, 0, 0)$ ισχύουν οι εξής αντιμεταθετικές σχέσεις των

τελεστών:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2M\delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta_B^A \\ \{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Στη συνέχεια, μπορούν να οριστούν οι τελεστές

$$\begin{aligned} a_\alpha^A &= \frac{1}{\sqrt{2M}}Q_\alpha^A \\ (a_\alpha^A)^+ &= \frac{1}{\sqrt{2M}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}A} \end{aligned} \quad (3.3)$$

και έτσι η σχέση (3.2) αποκτά την μορφή

$$\begin{aligned} \{a_\alpha^A, (a_\beta^B)^+\} &= \delta_\alpha^\beta \delta_B^A \\ \{a_\alpha^A, a_\beta^B\} &= \{(a_\alpha^A)^+, (a_\beta^B)^+\} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Οι αναπαράστασεις αυτής της άλγεβρας είναι γνωστές και κατασκευάζονται από την κατάσταση κενού Clifford Ω . Στην κατάσταση αυτή ισχύει

$$a_\alpha^A \Omega = 0 \quad (3.5)$$

Όταν δράσει ο τελεστής αναβίβασης $(a_\alpha^A)^+$ στην Ω κατασκευάζονται οι υπόλοιπες καταστάσεις ως εξής

$$\Omega_{A_1 \dots A_n}^{(n)\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a_{\alpha_1}^{A_1})^+ \dots (a_{\alpha_n}^{A_n})^+ \Omega \quad (3.6)$$

Για $N=1$, στην θεμελιώδη αναπαράσταση υπάρχουν οι καταστάσεις

$$\begin{aligned} &\Omega \\ &(a_\alpha)^+ \Omega \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha)^+(a_\beta)^+ \Omega = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta}(a^\gamma)^+(a_\gamma)^+ \Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Στην περίπτωση αυτή, οι 2 καταστάσεις έχουν σπιν 0 και η μία σπιν $\frac{1}{2}$. Για τις περιπτώσεις όπου η κατάσταση κενού Ω_j έχει σπιν j , μεγαλύτερο ή ίσο με μηδέν, υπάρχουν τα σωματίδια που φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα

Spin	Ω_0	$\Omega_{\frac{1}{2}}$	Ω_1	$\Omega_{\frac{3}{2}}$
0	2	1		
$\frac{1}{2}$	1	2	1	
1		1	2	1
$\frac{3}{2}$			1	2
2				1

Μπορεί να ακολουθηθεί μια παρόμοια διαδικασία για σωματίδια χωρίς μάζα, δηλαδή για $P^2 = 0$, στο σύστημα αναφοράς $P_m = (-E, 0, 0, E)$. Έτσι, η άλγεβρα αποκτά την μορφή

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2 \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_B^A \\ \{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Αν χρησιμοποιηθούν οι τελεστές

$$\begin{aligned} a^A &= \frac{1}{2\sqrt{E}} Q_1^A \\ a^+_A &= \frac{1}{2\sqrt{E}} \bar{Q}_1^A = (a^A)^+ \end{aligned} \quad (3.9)$$

η άλγεβρα (3.8) γράφεται

$$\begin{aligned} \{a^A, a^+_B\} &= \delta^A_B \\ \{a^A, a^B\} &= \{a^+_A, a^+_B\} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Οι τελεστές a^+_A και a^A αυξάνουν και μειώνουν αντίστοιχα την ελικότητα μιας κατάστασης κατά $\frac{1}{2}$. Για την κατάσταση με την πιο χαμηλή ελικότητα λ ισχύει

$$a^A \Omega_\lambda = 0 \quad (3.11)$$

Για $N=1$ υπάρχουν τα σωματίδια που φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα

hel. \ λ	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2								1
$\frac{3}{2}$							1	1
1						1	1	
$\frac{1}{2}$					1	1		
0				1	1			
$-\frac{1}{2}$			1	1				
-1		1	1					
$-\frac{3}{2}$	1	1						
-2	1							

3.3 Βαθμωτή multiplet

Ένας απειροελάχιστος μετασχηματισμός υπερσυμμετρίας δ_ξ που δρα σε ένα πεδίο ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned}
 (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta)A &= 2(\eta\sigma^m \bar{\xi} - \xi\sigma^m \bar{\eta})P_m A \\
 &= -2i(\eta\sigma^m \bar{\xi} - \xi\sigma^m \bar{\eta})\partial_m A
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Τα στοιχεία η και ξ είναι αντιμετατιθέμενες παράμετροι και έχουν δύο σπινωριακούς δείκτες. Οι συμβάσεις γραφής των δεικτών των διαφορών ποσοτήτων και η άλγεβρα των σπινόρων δίνονται στο Παράρτημα A. Παρόλο που η πιο πάνω σχέση φαίνεται αυθαίρετη, θα αποδειχθεί με ένα πιο αυστηρό τρόπο στα επόμενα υποκεφάλαια ότι όντως ικανοποιείται.

Ξεκινώντας από ένα βαθμωτό πεδίο A , ορίζεται ο σπίνωρας ψ στον οποίο μετασχηματίζεται το A ως εξής

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\psi \tag{3.13}$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός του ψ ορίζεται ως

$$\delta_\xi \psi = i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F \tag{3.14}$$

όπου το F είναι ένα τανυστικό πεδίο. Τέλος, ο μετασχηματισμός του F γράφεται

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi \quad (3.15)$$

Η επιλογή των πεδίων και των μετασχηματισμών τους έγινε με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε να κατασκευαστεί μια multiplet που περιέχει συνιστάμενα πεδία που μετασχηματίζονται σύμφωνα με την σχέση (3.12). Αυτή ονομάζεται χειραλική ή βαθμωτή multiplet. Τα συνιστάμενα πεδία σχηματίζουν μια γραμμική αναπαράσταση της άλγεβρας (3.1) και ένας μετασχηματισμός υπερσυμμετρίας τα αναμιγνύει μεταξύ τους. Φαίνεται ότι αν το A έχει διαστάσεις 1, τότε το ψ έχει διαστάσεις $\frac{3}{2}$ και το F έχει διαστάσεις 2. Επίσης, φαίνεται ότι το F μετασχηματίζεται σε μια ολική παράγωγο. Αυτό ισχύει πάντα για το συνιστάμενο πεδίο με τις μεγαλύτερες διαστάσεις μιας multiplet.

Από τα F, A, ψ είναι δυνατόν να κατασκευαστούν δράσεις που είναι αναλλοιώτες κάτω από μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας. Για να συμβαίνει αυτό ωστόσο πρέπει οι αντίστοιχες Λαγκρανζιανές να μετασχηματίζονται απλά σε μια ολική παράγωγο. Δύο υποψήφιοι όροι για τη Λαγκρανζιανή δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{L}_0 = i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi + A^*\square A + F^*F \quad (3.16)$$

και

$$\mathcal{L}_m = AF + A^*F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi} \quad (3.17)$$

3.4 Υπερπεδία και Υπερχώρος

Ο υπερχώρος είναι μια επέκταση του χώρου Minkowski και περιέχει τις χωροχρονικές μεταβλητές x^m αλλά και τα αντιμετατιθέμενα στοιχεία $\bar{\theta}, \theta$. Επίσης, τα υπερπεδία είναι μια χρήσιμη επέκταση της έννοιας των πεδίων. Είναι συναρτήσεις του υπερχώρου και αποτελούνται από συνιστάμενα πεδία τα οποία μπορούν να ανακτηθούν από το ανάπτυγμα των υπερπεδίων. Είναι βοηθητικά για τους πολλαπλασιασμούς αναπαραστάσεων αλλά και για την κατασκευή Λαγκρανζιανών αλληλεπίδρασης.

Αρχικά ορίζεται το εξής στοιχείο του υπερχώρου

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\{-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}\}} \quad (3.18)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta}) = G(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \quad (3.19)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τους όρους $G(0, \xi, \bar{\xi})$, $G(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi})$ και κρατώντας μόνο όρους της τάξης $\xi, \bar{\xi}$ αποδεικνύεται ότι για να ισχύει η σχέση (3.19) πρέπει οι τελεστές Q, \bar{Q} να ορίζονται ως εξής

$$\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\alpha} \partial_m \right) \quad (3.20)$$

Επομένως η μορφή των τελεστών και η άλγεβρα που ικανοποιούν γράφεται

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\alpha} \partial_m \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \partial_m \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Θα μπορούσε να μελετηθεί το γινόμενο $G(x^m, \theta, \bar{\theta})G(0, \xi, \bar{\xi})$ αντί το γινόμενο $G(0, \xi, \bar{\xi})G(x^m, \theta, \bar{\theta})$. Τότε θα αποκτώνταν οι τελεστές D και \bar{D} οι οποίοι αντιμετατίθενται με τους Q, \bar{Q} και ορίζονται ως

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\alpha} \partial_m \end{aligned} \quad (3.23)$$

Τώρα, το πιο γενικό υπερπεδίο δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ &+ \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}u_m(x) \\ &+ \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Γινόμενα από τρία θ ή $\bar{\theta}$ μηδενίζονται επειδή τα $\theta, \bar{\theta}$ είναι αντιμετατιθέμενα στοιχεία

που έχουν δείκτες που παίρνουν τιμές από ένα μέχρι δύο. Φαίνεται ότι γραμμικοί συνδυασμοί και γινόμενα υπερπεδίων είναι πάλι υπερπεδία. Ο μετασχηματισμός υπερσυμμετρίας του πιο πάνω υπερπεδίου γράφεται

$$\begin{aligned}
\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta_\xi f(x) + \theta \delta_\xi \phi(x) + \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\chi}(x) \\
&+ \theta \theta \delta_\xi m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_\xi n(x) + \theta \sigma^m \bar{\theta} \delta_\xi u_m(x) \\
&+ \theta \theta \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \delta_\xi \psi(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_\xi d(x) \\
&\equiv (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) F
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Δρώντας με τον τελεστή $(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})$ της (3.20) στο υπερπεδίο $F(x, \theta, \bar{\theta})$ της (3.24) και εξισώνοντας τις δυνάμεις των $\theta, \bar{\theta}$ του αποτελέσματος με τις δυνάμεις του μετασχηματισμού $\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta})$ της (3.25) τότε μπορεί να βρεθεί ο μετασχηματισμός υπερσυμμετρίας για το κάθε συνιστάμενο πεδίο. Ο μεταθέτης των μετασχηματισμών ικανοποιεί την σχέση (3.12) χάρις στην άλγεβρα (3.22).

Γενικά, τα υπερπεδία αποτελούν αναγώγιμες γραμμικές αναπαραστάσεις της άλγεβρας τις υπερσυμμετρίας. Είναι δυνατόν να εξαλειφθούν τα επιπλέον συνιστάμενα πεδία επιβάλλοντας περιορισμούς όπως $\bar{D}F = 0$ ή $F = F^+$. Ο πρώτος περιορισμός είναι χαρακτηριστικό των χειραλικών υπερπεδίων και ο δεύτερος των διανυσματικών υπερπεδίων. Οι δύο αυτοί περιορισμοί δεν καθορίζουν την χωροχρονική συμπεριφορά των συνιστάμενων πεδίων, κάτι που συμβαίνει όταν υπάρχουν επιπλέον περιορισμοί οι οποίοι δίνουν διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα για $DD\Phi = \bar{D}\Phi = 0$ παράγονται εξισώσεις για άμαζα σωματίδια, ενώ για $D\Phi = \bar{D}\Phi = 0$ προκύπτει $\Phi = a$ -σταθερά.

3.5 Χειραλικά υπερπεδία

Τα χειραλικά υπερπεδία χαρακτηρίζονται από την συνθήκη

$$\bar{D}_\alpha \Phi = 0 \tag{3.26}$$

Από τον ορισμό του τελεστή \bar{D} , (3.23), αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
\bar{D}_\alpha (x^m + i\theta \sigma^m \bar{\theta}) &= 0 \\
\bar{D}_\alpha \theta &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Επομένως αν χρησιμοποιηθούν οι μεταβλητές y^m και θ , όπου $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, μπορεί να κατασκευαστεί το πιο γενικό χειραλικό υπερπεδίο Φ ως εξής

$$\begin{aligned}\Phi &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ &= A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x)\end{aligned}\quad (3.28)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές y^m και θ οι τελεστές D και \bar{D} γράφονται

$$\begin{aligned}D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\end{aligned}\quad (3.29)$$

Το υπερπεδίο Φ^+ ικανοποιεί την συνθήκη $D_\alpha\Phi^+ = 0$ και είναι συνάρτηση των μεταβλητών $y^{+m} = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ και $\bar{\theta}$. Δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= A^*(y^+) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^+) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^+) \\ &= A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A^*(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F(x)\end{aligned}\quad (3.30)$$

Δρώντας με τον τελεστή $(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})$ στην (3.28) και εξισώνοντας τις δυνάμεις των $\theta, \bar{\theta}$ με τις αντίστοιχες δυνάμεις της έκφρασης $\delta_\xi\Phi$ φαίνεται ότι αναπαράγονται οι μετασχηματισμοί υπερσυμμετρίας των πεδίων A, ψ, F (3.13), (3.14) και (3.15) αντίστοιχα. Επίσης, φαίνεται ότι τα F, F^* που είναι τα συνιστάμενα πεδία με τις μεγαλύτερες διαστάσεις των χειραλικών υπερπεδίων Φ, Φ^+ μετασχηματίζονται σε ολικές παραγώγους.

Παίρνοντας γινόμενα χειραλικών υπερπεδίων μπορούν να κατασκευαστούν άλλα υπερπεδία. Συνεπώς η συνιστώσα $\theta\theta$ των γινομένων μετασχηματίζεται σε μια ολική παράγωγο. Από την άλλη, το $\Phi^+\Phi$ δεν είναι χειραλικό υπερπεδίο όμως η συνιστώσα $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ του γινομένου αυτού (όπως και οποιουδήποτε υπερπεδίου) μετασχηματίζεται σε μια ολική παράγωγο. Επομένως μπορεί να κατασκευαστεί η πιο γενική, επανακανονικοποιήσιμη Λαγκρανζιανή χρησιμοποιώντας συνιστώσες

των χειραλικών πεδίων ως εξής

$$\mathcal{L} = \Phi_i^+ \Phi_i |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \text{ συνιστ.} + \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \lambda_i \Phi_i \right) \right]_{\theta\theta} \text{ συνιστ.} + \varepsilon \rho \mu. \sigma \upsilon \zeta. \quad (3.31)$$

Γινόμενα από 4 και περισσότερα πεδία δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν επειδή οι συνιστώσες $\theta\theta$ τους έχουν διαστάσεις πάνω από 4 και επομένως δεν θα ήταν επανακανονικοποιήσιμη η Λαγκρανζιανή. Τα στοιχεία m_{ij}, g_{ijk} είναι συμμετρικά ως προς την εναλλαγή των δεικτών τους. Επίσης, το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των x ή y μεταβλητών.

Η Λαγκρανζιανή σαν συνάρτηση των συνιστάμενων πεδίων δίνεται απο την σχέση

$$\mathcal{L} = i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i + F_i^* F_i + \left[m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i + \varepsilon \rho \mu. \sigma \upsilon \zeta. \right] \quad (3.32)$$

Στο πιο πάνω αποτέλεσμα έχουν παραλειφθεί ολικές παραγώγοι αφού δεν επηρεάζουν την δράση της Λαγκρανζιανής.

3.6 Διανυσματικά υπερπεδία

Τα διανυσματικά πεδία χαρακτηρίζονται από την συνθήκη

$$V = V^+ \quad (3.33)$$

Μια επιλογή διανυσματικού πεδίου δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\
&+ \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] \\
&- \theta\sigma^m\bar{\theta}u_m(x) + i\theta\bar{\theta}\bar{\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right]} \\
&- i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Τα συνιστάμενα πεδία C, D, M, N, u_m της (3.34) πρέπει να είναι πραγματικά, ούτως ώστε να ικανοποιείται η σχέση (3.33). Το πιο πάνω υπερπεδίο ονομάζεται διανυσματικό χάρις στο συνιστάμενο διανυσματικό πεδίο u_m . Θα μπορούσε να οριζόταν και με μια πιο απλή αλλά παράλληλα γενική μορφή. Ωστόσο, έχει επιλεχθεί, χωρίς απώλεια της γενικότητας η συγκεκριμένη μορφή για να μπορεί να οριστεί η πιο κάτω υπερσυμμετρική γενίκευση του μετασχηματισμού βαθμίδας

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^+ \tag{3.35}$$

Ο όρος $\theta\sigma^m\bar{\theta}$ του $(\Phi + \Phi^+)$ έχει τον συντελεστή $i\partial_m(A - A^*)$ ο οποίος επιτρέπει τον συνηθισμένο μετασχηματισμό βαθμίδας $u_m \rightarrow u_m + \partial_m\alpha$. Κάτω από αυτό τον μετασχηματισμό τα υπόλοιπα συνιστάμενα πεδία παίρνουν την εξής μορφή

$$\begin{aligned}
C &\rightarrow C + A + A^* \\
\chi &\rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi \\
M + iN &\rightarrow M + iN - 2iF \\
u_m &\rightarrow u_m - i\partial(A - A^*) \\
\lambda &\rightarrow \lambda \\
D &\rightarrow D
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Μια ειδική βαθμίδα είναι η Wess-Zumino (WZ) όπου τα C, χ, M, N μηδενίζονται και επίσης μπορούν εύκολα να υπολογιστούν δυνάμεις του V .

Το V είναι η υπερσυμμετρική γενίκευση του διανυσματικού δυναμικού της θεωρίας Maxwell. Με στόχο να βρεθεί η υπερσυμμετρική γενίκευση του ηλεκτρομαγνητικού ταυστή, ορίζονται τα εξής χειραλικά και αναλλοίωτα κάτω από

μετασχηματισμούς βαθμίδας υπερπεδία

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \end{aligned} \quad (3.37)$$

Η υπερσυμμετρική γενίκευση της Λαγκρανζιανής του ελεύθερου διανυσματικού πεδίου γράφεται

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \quad (3.38)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.34), (3.38), (3.37) αποδεικνύεται μετά από αρκετές πράξεις ότι η δράση της πιο πάνω Λαγκρανζιανής ισούται με

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v^{mn}v_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} \right\} \quad (3.39)$$

με $v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$.

3.7 Υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας

Τα χειραλικά υπερπεδία Φ_l κάτω από περιστροφές $U(1)$ παίρνουν την μορφή

$$\Phi'_l = e^{-it_l\lambda}\Phi_l \quad (3.40)$$

όπου το $e^{-it_l\lambda}$ είναι στοιχείο της ομάδας $U(1)$, το t_l το φορτίο και το λ η γωνία περιστροφής. Τα t_l και λ είναι πραγματικές σταθερές και επομένως το μετασχηματισμένο χειραλικό υπερπεδίο είναι και πάλι χειραλικό. Η πιο γενική Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό (3.40) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_P \\ \mathcal{L}_K &= \Phi_l^+ \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ \mathcal{L}_P &= \left[\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right] \Big|_{\theta\theta} + \varepsilon\rho\mu.\sigma\nu\zeta., \end{aligned} \quad (3.41)$$

όπου m_{ij} ή $g_{ijk} = 0$ όταν $t_i + t_j$ ή $t_i + t_j + t_k \neq 0$ αντίστοιχα. Ο όρος \mathcal{L}_P ονομάζεται υπερδυναμικό.

Στην περίπτωση που η σταθερά λ έχει εξάρτηση από τις μεταβλητές του χωροχρόνου ο αντίστοιχος μετασχηματισμός του (3.40) ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\Phi'_l &= e^{-it_l\Lambda}\Phi_l, & \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda &= 0 \\ \Phi'_l{}^+ &= e^{it_l\Lambda^+}\Phi_l{}^+, & D_{\alpha}\Lambda^+ &= 0,\end{aligned}\tag{3.42}$$

ούτως ώστε τα Φ'_l να παραμένουν χειραλικά υπερπεδία.

Φαίνεται ότι ο όρος \mathcal{L}_P της Λαγκρανζιανής (3.41) παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς (3.42). Ωστόσο, για να παραμένει αναλλοίωτος και ο όρος \mathcal{L}_K πρέπει να εισαχθεί ένα διανυσματικό υπερπεδίο V που μετασχηματίζεται ως

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+)\tag{3.43}$$

Έτσι, η ολική Λαγκρανζιανή η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς $U(1)$ μετασχηματισμούς γράφεται

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}(W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_l{}^+ e^{t_l V} \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right) \Big|_{\theta\theta} + \varepsilon\rho\mu.\sigma\nu\zeta. \right]\end{aligned}\tag{3.44}$$

Στην βαθμίδα Wess-Zumino ο όρος $\Phi_l{}^+ e^{t_l V} \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$ παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\Phi_l{}^+ e^{t_l V} \Phi_l|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= FF^* + A\Box A^* + i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi \\ &+ tv^n \left(\frac{1}{2}\psi\bar{\sigma}^n\psi + \frac{i}{2}A^*\partial_n A - \frac{i}{2}\partial_n A^*A \right) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}t(A\bar{\lambda}\bar{\psi} - A^*\lambda\psi) + \frac{1}{2}\left(tD - \frac{1}{2}t^2v_nv^n \right)A^*A\end{aligned}\tag{3.45}$$

Η υπερσυμμετρική επέκταση της Λαγκρανζιανής της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής μπορεί να κατασκευαστεί εισάγοντας τα 2 χειραλικά υπερπεδία

$$\Phi'_+ = e^{-ie\Lambda}\Phi_+, \quad \Phi'_- = e^{ie\Lambda}\Phi_-\tag{3.46}$$

Το Φ_+ αντιστοιχεί σε σωματίδια με θετικό φορτίο e και το Φ_- σε σωματίδια με αρνητικό φορτίο $-e$. Η πιο γενική μορφή της Λαγκρανζιανής αυτής μπορεί να κατασκευαστεί από την (3.44) χρησιμοποιώντας όρους που είναι αναλλοίωτοι κάτω

από τους μετασχηματισμούς (3.46). Το αποτέλεσμα δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & \frac{1}{4}(WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_+^+ e^{eV} \Phi_+|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi_-^+ e^{-eV} \Phi_-|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ & + m(\Phi_+ \Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi_+^+ \Phi_-^+|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Μια σημαντική παρατήρηση είναι το γεγονός ότι στην πιο πάνω Λαγκρανζιανή δεν υπάρχουν όροι με γινόμενα τριών χειραλικών υπερπεδίων αφού κανένας συνδυασμός τους δεν μπορεί να διατηρηθεί αναλλοίωτος κάτω από τους μετασχηματισμούς (3.46). Επίσης, αν χρησιμοποιηθούν τα συνιστάμενα πεδία το πιο πάνω αποτέλεσμα αποκτά την μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^n\partial_n\bar{\lambda} \\ & + F_+F_+^* + F_-F_-^* + A_+^*\square A_+ + A_-^*\square A_- \\ & + i(\partial_n\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_-) + ev^n \left[\frac{1}{2}\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ - \frac{1}{2}\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_- \right. \\ & \left. + \frac{i}{2}A_+^*\partial_n A_+ - \frac{i}{2}\partial_n A_+^* A_+ - \frac{i}{2}A_-^*\partial_n A_- + \frac{i}{2}\partial_n A_-^* A_- \right] \\ & - \frac{ie}{\sqrt{2}}(A_+\bar{\psi}_+\bar{\lambda} - A_+^*\psi_+\lambda - A_-\bar{\psi}_-\bar{\lambda} + A_-^*\psi_-\lambda) \\ & + \frac{e}{2}D[A_+^*A_+ - A_-^*A_-] - \frac{1}{4}e^2v_nv^n(A_+^*A_+ - A_-^*A_-) \\ & + m[A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \bar{\psi}_+\bar{\psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Στην (3.48) οι σπίνορες Weyl ψ_+, ψ_- όταν συνδυαστούν δίνουν ένα φερμιόνιο Dirac με μάζα, το ηλεκτρόνιο. Τα συνιστάμενα βαθμωτά πεδία A_-, A_+ αντιστοιχούν σε σωματίδιο με μάζα και σπιν 0, το selectron το οποίο είναι το υπερσυμμετρικό ζευγάρι του ηλεκτρονίου. Το συνιστάμενο πεδίο λ είναι φερμιόνιο Majorana. Είναι άμαζο, με σπιν $\frac{1}{2}$ και αντιστοιχεί στο photino, το υπερσυμμετρικό ζευγάρι του φωτονίου. Το v_{mn} είναι ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής που εμπεριέχει το φωτονικό πεδίο u_m και τα D, F_+, F_- είναι βοηθητικά (auxiliary) πεδία, δηλαδή δεν υπάρχουν παράγωγοι των πεδίων και γι' αυτό μπορούν να φύγουν από την κλασική Λαγκρανζιανή χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Μια σημαντική παρατήρηση είναι οι συζεύξεις μεταξύ selectron, ηλεκτρόνιο και photino. Η συσχέτιση των υπερσυμμετρικών ζευγαριών φαίνεται από τους μετασχηματισμούς

υπερσυμμετρίας

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta_\xi \psi &= i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi} \mathcal{D}_m A + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi \\
\delta_\xi v_{mn} &= i[(\xi \sigma^n \partial_m \bar{\lambda} + \bar{\xi} \bar{\sigma}^n \partial_m \lambda) - (n \leftrightarrow m)] \\
\delta_\xi \lambda &= i\xi D + \sigma^{mn} \xi v_{mn} \\
\delta_\xi D &= \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \partial_m \lambda - \xi \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_m A &= \partial_m A + iev_m A \\
\mathcal{D}_m \psi &= \partial_m \psi + iev_m \psi
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Δηλαδή κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς το κάθε σωματίδιο αναμιγνύεται με το υπερσυμμετρικό του ζευγάρι.

Στην μη-αβελιανή περίπτωση ο μετασχηματισμός (3.40) γράφεται

$$\Phi' = e^{-i\Lambda} \Phi, \quad \Phi'^+ = \Phi^+ e^{i\Lambda^+} \tag{3.51}$$

όπου

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^\alpha \Lambda_\alpha \tag{3.52}$$

Οι πίνακες T^α είναι οι ερμιτιανοί γεννήτορες της ομάδας που ορίζεται από το χειραλικό υπερπεδίο Φ και τα Λ_α χειραλικά υπερπεδία.

Ακόμη, για να είναι αναλλοίωτη η Λαγκρανζιανή (3.44) κάτω από τους μετασχηματισμούς (3.51) πρέπει ο μετασχηματισμός του V (3.57) να επεκταθεί ως

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^+} e^V e^{i\Lambda} \tag{3.53}$$

όπου

$$V_{ij} = T_{ij}^\alpha V_\alpha \tag{3.54}$$

Ο υπερσυμμετρικός τανυστής W^α γενικεύεται ως

$$W^\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} e^{-V} D_\alpha e^V \tag{3.55}$$

και κάτω από μη-αβελιανούς μετασχηματισμούς βαθμίδας συμπεριφέρεται ως

$$W_\alpha \rightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \quad (3.56)$$

Έτσι η πιο γενική, υπερσυμμετρική, επανακανονικοποιήσιμη και αναλλοίωτη κάτω από μη-αβελιανούς μετασχηματισμούς βαθμίδας Λαγκρανζιανή δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{16kg^2} \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi^+ e^V \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}} \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) |_{\theta\theta} + \varepsilon \rho \mu. \sigma \nu \zeta. \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Αν η Λαγκρανζιανή (3.57) αναπτυχθεί σε συνιστάμενα πεδία στην βαθμίδα Wess-Zumino παραλείποντας τις συνεισφορές από τους όρους $m_{ij} \Phi_i \Phi_j$ και $g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k$, τότε αποκτάται η σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} v_{mn}^{(\alpha)} v_{mn}^{(\alpha)} - i \bar{\lambda}^{(\alpha)} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^{(\alpha)} + \frac{1}{2} D^{(\alpha)} D^{(\alpha)} - \mathcal{D}_m A^+ \mathcal{D}_m A \\ & - i \bar{\psi} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi + F^+ F + i\sqrt{2}g(A^+ T^{(\alpha)} \psi \lambda^{(\alpha)} - \bar{\lambda}^{(\alpha)} T^{(\alpha)} A \bar{\psi}) \\ & + g D^{(\alpha)} A^+ T^{(\alpha)} A \end{aligned} \quad (3.58)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m A &= \partial_m A + ig v_m^{(\alpha)} T^{(\alpha)} A \\ \mathcal{D}_m \psi &= \partial_m \psi + ig v_m^{(\alpha)} T^{(\alpha)} \psi \\ \mathcal{D}_m \lambda^{(\alpha)} &= \partial_m \lambda^{(\alpha)} - gt^{abc} v_m^{(b)} \lambda^{(c)} \\ v_{mn}^{(\alpha)} &= \partial_m v_n^{(\alpha)} - \partial_n v_m^{(\alpha)} - gt^{abc} v_m^{(b)} v_n^{(c)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Στην (3.58) το στοιχείο $v_{mn}^{(\alpha)}$ είναι ο γλουονικός ταυιστής που εμπεριέχει το γλουονικό πεδίο $v_m^{(\alpha)}$. Το συνιστάμενο πεδίο $\lambda^{(\alpha)}$ είναι το gluino που έχει σπιν $\frac{1}{2}$ και είναι το υπερσυμμετρικό ζευγάρι του γλουονίου. Οι δείκτες του gluino $\lambda^{(\alpha)}$ και του γλουονίου $v_m^{(\alpha)}$ οφείλονται στο γεγονός ότι τα δύο αυτά συνιστάμενα πεδία βρίσκονται στην προσαρτημένη αναπαράσταση της ομάδας στην οποία ανήκουν οι μη αβελιανοί μετασχηματισμοί βαθμίδας (3.51). Για τη θεωρία της υπερσυμμετρικής QCD η ομάδα αυτή είναι η SU(3) και οι δείκτες α παίρνουν τιμές από 1 μέχρι 8. Το πεδίο A είναι ένα squark το οποίο είναι ένα σωματίδιο με σπιν 0 και είναι το υπερσυμμετρικό ζευγάρι του κουαρκ ψ . Το κουαρκ αυτό είναι σπίνορας Weyl με 2

βαθμούς ελευθερίας και προκειμένου να κατασκευαστεί σπίνορας Dirac με 4 βαθμούς ελευθερίας πρέπει να εισαχθούν 2 χειραλικά υπερπεδία κατ' αναλογία με τις σχέσεις (3.46). Ακόμη, αυτά πρέπει να εισαχθούν απαραίτητα στην περίπτωση που κάποιος θέλει να μελετήσει όρους μάζας $m_{ij}\Phi_i\Phi_j$. Τα F και D είναι βοηθητικά πεδία. Στην Λαγκρανζιανή παρατηρούνται συζεύξεις μεταξύ gluino, κουαρκ και squark.

Οι μετασχηματισμοί υπερσυμμετρίας των συνιστάμενων πεδίων που εμπεριέχονται στην (3.58) γράφονται

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta_\xi\psi &= i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\mathcal{D}_m A + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\psi + i2gT^{(\alpha)}A\xi\bar{\lambda}^{(\alpha)} \\
\delta_\xi v_m^{(\alpha)} &= -i\bar{\lambda}^{(\alpha)}\bar{\sigma}^m\xi + i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\lambda^{(\alpha)} \\
\delta_\xi\lambda^{(\alpha)} &= \sigma^{mn}\xi v_{mn}^{(\alpha)} + i\xi D^{(\alpha)} \\
\delta_\xi D^{(\alpha)} &= -\xi\sigma^m\mathcal{D}_m\bar{\lambda}^{(\alpha)} - \mathcal{D}_m\lambda^{(\alpha)}\sigma^m\bar{\xi}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Κεφάλαιο 4

Υπερσυμμετρικές θεωρίες στο πλέγμα

4.1 Κίνητρα για μελέτη υπερσυμμετρικών θεωριών στο πλέγμα

Υπάρχουν αρκετά κίνητρα για την μελέτη υπερσυμμετρικών θεωριών στο πλέγμα. Με αυτό τον τρόπο μπορούν να αποκτηθούν μη-διαταρακτικές πληροφορίες για τις θεωρίες που δεν μπορούν να αποκτηθούν με άλλο τρόπο. Κατ' αρχάς είναι πιθανόν για μια θεωρία που είναι καλά ορισμένη στην θεωρία διαταραχών να παρουσιάζει μια μη διαταρακτική ανωμαλία. Έχει διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι υπάρχει μια μη διαταρακτική, υπερσυμμετρική ανωμαλία [8] και το πλέγμα προσφέρει την δυνατότητα μελέτης αυτής της περίπτωσης. Επίσης, προσομοιώσεις Monte Carlo στο πλέγμα καθιστούν δυνατή την μελέτη δράσεων που περιέχουν μη ολομορφικές ποσότητες που σχετίζονται με τα λεγόμενα supersymmetry-breaking soft-terms τα οποία καθορίζουν φάσματα και συζεύξεις υπερσυμμετρικών σωματιδίων. Ένα παράδειγμα τέτοιας δράσης φαίνεται στο [9]. Ένα άλλο κίνητρο είναι η καλύτερη κατανόηση του dynamical supersymmetry breaking μέσω προσομοιώσεων. Ένας καλός φορμαλισμός της υπερσυμμετρικής Yang-Mills θεωρίας (SYM) στο πλέγμα θα βοηθούσε στην κατανόηση των ισχυρών αλληλεπιδράσεων που συντελούν στον διαχωρισμό των υπερσυμμετρικών σωματιδίων από τα αντίστοιχα ζευγάρια τους που ανήκουν στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Ακόμη θα ήταν επιθυμητή η διερεύνηση στο πλέγμα μη-διαταρακτικών φορμαλισμών, που προκύπτουν από την μελέτη θεμάτων της θεωρίας υπερχορδών όπως Matrix theory [10, 11] και AdS/CFT

correspondence [12–14], σε σχέση με SYM για διάφορους αριθμούς χωροχρονικών διαστάσεων. Τέλος, για συγκεκριμένες υπερσυμμετρικές θεωρίες πολλά πράγματα είναι γνωστά με ακρίβεια και έτσι ο υπολογισμός τους ξανά στο πλέγμα θα ήταν ένας τρόπος να αναπτυχθούν και να βελτιωθούν οι πλεγματικές αναλυτικές μέθοδοι και οι προσομοιώσεις που χρησιμοποιούνται. Για παράδειγμα θα μπορούσε να υπολογιστεί η παραβίαση συμμετρίας χειρός για την N=2 SYM η οποία μελετήθηκε από τους Seiberg και Witten στο [15].

4.2 Υπερσυμμετρική SU(2) και SU(3) Κβαντική Χρωμοδυναμική (SQCD) στο πλέγμα

4.2.1 SU(2) θεωρία βαθμίδας

Η Λαγκρανζιανή της SQCD στην βαθμίδα Wess-Zumino εμπεριέχει το πεδίο του gluino λ και το γλουονικό πεδίο v_μ . Επίσης αποτελείται από δύο χειραλικά υπερπεδία, τα $\Phi_{+I} \equiv P_I$ και $\Phi_{-I} \equiv Q_I$, $I = 1, \dots, N_f$, τα οποία εμπεριέχουν τα σωματίδια ύλης. Το καθένα από αυτά έχει σαν συνιστάμενα πεδία ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, ένα φερμιόνιο Weyl και ένα βοηθητικό πεδίο. Το βαθμωτό πεδίο των χειραλικών υπερπεδίων P_I και Q_I συμβολίζεται με p_I, q_I αντίστοιχα και το φερμιόνιο Weyl με χ_{p_I}, χ_{q_I} . Το βοηθητικό πεδίο δεν θα μελετηθεί παρακάτω. Η διαφορά των δύο χειραλικών υπερπεδίων έγκειται στο $U(1)_V$ φορτίο τους, +1 για το P και -1 για το Q. Όμως, μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς που ανήκουν στην ομάδα SU(2). Ακόμη, τα συνιστάμενα πεδία διατηρούν την συμμετρία CP και επομένως οι συντελεστές των όρων στην Λαγκρανζιανή είναι πραγματικοί. Η συμμετρία αυτή ορίζεται ως [16]

$$\begin{aligned} p &\rightarrow p^*, \quad \chi_p \rightarrow \bar{\chi}_p, \quad q \rightarrow q^*, \quad \chi_q \rightarrow \bar{\chi}_q \\ \lambda &\rightarrow \lambda^* = \bar{\lambda}^\alpha t^{\alpha T} = \bar{\lambda}^T, \quad \bar{\lambda} \rightarrow \lambda^T \end{aligned} \quad (4.1)$$

Επίσης, διατηρείται και η συμμετρία S η οποία ορίζεται ως

$$S : \quad p_I \leftrightarrow q_I, \quad p_I^* \leftrightarrow q_I^*, \quad \chi_{p_I} \leftrightarrow \chi_{q_I}, \quad \bar{\chi}_{p_I} \leftrightarrow \bar{\chi}_{q_I} \quad (4.2)$$

Οι προαναφερθείσες συμμετρίες διατηρούνται τόσο στη συνεχή όσο και στη διακριτοποιημένη θεωρία. Έχοντας υπόψη αυτές τις συμμετρίες μπορεί να γραφεί η

πιο γενική Λαγκρανζιανή της SQCD στο πλέγμα. Αρχικά δεν θα ληφθεί υπόψη η γεύση των σωματιδίων. Στη συνέχεια του υποκεφαλαίου θα μελετηθούν οι περιπτώσεις για διάφορους αριθμούς γεύσεων και θα υποδειχθούν οι όροι που μηδενίζονται για κάθε περίπτωση. Η Λαγκρανζιανή που περιέχει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των βαθμωτών πεδίων p, q γράφεται

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{(0,0)} + \mathcal{L}_{(2,-2)} \quad (4.3a)$$

όπου

$$\mathcal{L}_m = m^2(p^+p + q^+q) \quad (4.3b)$$

και

$$\mathcal{L}_{(0,0)} = \lambda_1[(p^+p)^2 + (q^+q)^2] + \lambda_2 p^+ p q^+ q + \lambda_3 |p\epsilon q|^2 + \lambda_4 [(p\epsilon q)^2 + (p^+\epsilon q^+)^2] \quad (4.3c)$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(2,-2)} = & \nu_1 |q^+p|^2 + \nu_2 (|p^T\epsilon p|^2 + |q^T\epsilon q|^2) \\ & + \nu_3 [(p^T\epsilon p)(q^T\epsilon q) + (p^+\epsilon p^*)(q^+\epsilon q^*)] \\ & + \nu_4 [(q^+p)(q^T\epsilon q + p^+\epsilon p^*) + (p^+q)(q^+\epsilon q^* + p^T\epsilon p)] \end{aligned} \quad (4.3d)$$

Στην (4.3) έχουν κατασταλεί οι δείκτες των βαθμωτών πεδίων p, q που αφορούν την συμμετρία $SU(2)$ και παίρνουν την τιμή 1 ή 2. Επιπρόσθετα, η $\mathcal{L}_{(0,0)}$ έχει διγραμμικούς όρους με φορτίο $U(1)_V$ ίσο με 0 ενώ η $\mathcal{L}_{(2,-2)}$ με 2 ή -2. Το ϵ είναι ο δυοδιάστατος ταυιστής Levi-Cevita για τον οποίο ισχύει $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι οι όροι της Λαγκρανζιανής είναι περισσότεροι απ' ό,τι οι όροι της συνεχούς SQCD. Εξαιτίας των επιπλέον αυτών όρων θα χρειαστεί να προσαρμοστούν αρκετές παράμετροι με τέτοιο τρόπο (fine-tuning) ούτως ώστε η διακριτοποιημένη θεωρία να συμπίπτει με τη σωστή θεωρία στο όριο του συνεχούς. Όροι με περισσότερες από 4 δυνάμεις των πεδίων p, q δεν υπάρχουν αφού θα είχαν διαστάσεις μεγαλύτερες από 4 και έτσι η θεωρία δεν θα ήταν επανακανονικοποιήσιμη.

Από την άλλη, η πιο γενική Λαγκρανζιανή που περιέχει τα SU(2) gluino λ^α , $\alpha = 1, 2, 3$ και τα χειραλικά υπερπεδία και διατηρεί τις συμμετρίες CP και S γράφεται

$$L_y = y_1 [p^+ \lambda \chi_p + \bar{\chi}_p^T \bar{\lambda} p + q^+ \lambda \chi_q + \bar{\chi}_q^T \bar{\lambda} q] \\ + y_2 [p^T \epsilon \lambda \chi_q - \bar{\chi}_q^T \bar{\lambda} \epsilon \bar{p} + p^T \epsilon \lambda \chi_p - \bar{\chi}_p^T \bar{\lambda} \epsilon \bar{q}] \quad (4.4)$$

όπου

$$\lambda = \lambda^\alpha t^\alpha, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}^\alpha t^\alpha, \quad t^\alpha = \frac{1}{2} \sigma^\alpha \quad (4.5)$$

με σ^α να είναι οι 3 πίνακες Pauli.

Τώρα, στην περίπτωση που υπάρχει μια γεύση, δηλαδή $N_f = 1$, οι όροι με συντελεστές ν_2, ν_3, ν_4 της (4.3) μηδενίζονται. Όλοι οι υπόλοιποι όροι της (4.3) και (4.4) παραμένουν. Συγκεκριμένα, παραμένουν 8 παράμετροι που πρέπει να βαθμονομηθούν. Οι παραμέτροι y_1 και y_2 δεν μπορούν να βαθμονομηθούν ταυτόχρονα και έτσι καθιστούν την μελέτη της SU(2) SQCD στο πλέγμα πολύ δύσκολη.

Στην περίπτωση όπου $N_f = 2$ ο όρος της μάζας της (4.3) πρέπει να γραφεί με δείκτες γεύσης ως

$$m^2 \sum_{I=1}^{N_f} [p_I^+ p_I + q_I^+ q_I] \quad (4.6)$$

Επίσης, οι τεταρτοβάθμιοι όροι της (4.3) τροποποιούνται ως εξής

$$\lambda_1^{(1)} [(p_I^+ p_I)(p_J^+ p_J) + (p \leftrightarrow q)] + \lambda_1^{(2)} [(p_I^+ p_J)(p_J^+ p_I) + (p \leftrightarrow q)] \\ + \lambda_1^{(3)} \epsilon_{IJKL} [(p_I^+ p_K)(p_J^+ p_L) + (p \leftrightarrow q)] + \lambda_2 (p_I^+ p_I)(q_J^+ q_J) \\ + \lambda_3 (p_I^+ \epsilon q_J^*)(p_I^T \epsilon q_J) + \lambda_4 \epsilon_{IJKL} [(p_I^T \epsilon q_K)(p_J^T \epsilon q_L) + \epsilon \rho \mu \cdot \sigma \nu \zeta.] \quad (4.7)$$

και

$$\nu_1 (p_I^+ q_J)(q_J^+ p_I) + \nu_2^{(1)} [(p_I^T \epsilon p_J)(p_I^+ \epsilon p_J^*) + (p \leftrightarrow q)] \\ + \nu_2^{(2)} \epsilon_{IJKL} [(p_I^T \epsilon p_J)(p_K^+ \epsilon p_L^*) + (p \leftrightarrow q)] \\ + \nu_3 \epsilon_{IJKL} [(p_I^T \epsilon p_J)(q_K^T \epsilon q_L) + (p_I^+ \epsilon p_J^*)(q_K^+ \epsilon q_L^*)] \quad (4.8)$$

Η παράμετρος y_2 της (4.4) μηδενίζεται και οι υπόλοιποι όροι γράφονται

$$y [p_I^+ \lambda \chi_{p_I} + \bar{\chi}_{I p}^T \bar{\lambda} p_I + q_I^+ \lambda \chi_{q_I} + \bar{\chi}_{q_I}^T \bar{\lambda} q_I] \quad (4.9)$$

Έτσι, υπάρχουν 12 παραμέτροι που πρέπει να γίνουν fine-tuned. Η απαλοιφή της y_2 διευκολύνει το fine-tuning της y και έτσι δεν υπάρχει η δυσκολία που υπήρχε για $N_f = 1$.

Για $N_f > 2$ ο όρος μάζας παραμένει ο ίδιος με τον όρο (4.6) και οι όροι αλληλεπίδρασης με gluino παραμένουν ίδιοι με την (4.9). Όμως οι τεταρτοβάθμιοι όροι των (4.7), (4.8) τροποποιούνται ως εξής

$$\begin{aligned} & \lambda_1^{(1)} \left[(p_I^+ p_I)(p_J^+ p_J) + (p \leftrightarrow q) \right] + \lambda_1^{(2)} \left[(p_I^+ p_J)(p_J^+ p_I) + (p \leftrightarrow q) \right] \\ & + \lambda_1^{(3)} \left[t_{IJ}^\alpha t_{KL}^\alpha (p_I^+ p_J)(p_K^+ p_L) + (p \leftrightarrow q) \right] + \lambda_1^{(4)} \left[t_{IJ}^\alpha t_{KL}^\alpha (p_I^+ p_L)(p_K^+ p_J) + (p \leftrightarrow q) \right] \\ & + \lambda_2 (p_I^+ p_I)(q_J^+ q_J) + \lambda_3^{(1)} (p_I^+ \epsilon q_J^*)(p_I^T \epsilon q_J) + \lambda_3^{(2)} t_{IJ}^\alpha t_{KL}^\alpha (p_I^+ \epsilon p_K^*)(p_J^T \epsilon p_L) \end{aligned} \quad (4.10)$$

και

$$\begin{aligned} & \nu_1 (p_I^+ q_J)(q_J^+ p_I) + \nu_2^{(1)} \left[(p_I^T \epsilon p_J)(p_I^+ \epsilon p_J^*) + (p \leftrightarrow q) \right] \\ & + \nu_2^{(2)} \left[t_{IJ}^\alpha t_{KL}^\alpha (p_I^+ \epsilon p_K^*)(p_J^T \epsilon p_L) + (p \leftrightarrow q) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου t_{IJ}^α είναι οι γεννήτορες της ομάδας γεύσης $SU(N_f)$. Έτσι, παραμένουν και πάλι 12 παράμετροι.

4.2.2 $SU(3)$ θεωρία βαθμίδας

Μπορεί να ακολουθηθεί η πιο πάνω διαδικασία εύρεσης της πιο γενικής Λαγκρανζιανής της SQCD για την περίπτωση που τα χειραλικά υπερπεδία P και Q βρίσκονται στην θεμελιώδη αναπαράσταση της ομάδας $SU(3)$. Σαν αποτέλεσμα τα συνιστάμενα πεδία p, q θα έχουν δείκτες που παίρνουν τιμή από 1 μέχρι 3. Επίσης, αυτή τη φορά πρέπει να ληφθεί υπόψη και η Z_3 κεντρική συμμετρία της $SU(3)$. Κατ' αναλογία με τις (4.3), (4.4) η πιο γενική Λαγκρανζιανή που περιέχει αλληλεπιδράσεις χειραλικών υπερπεδίων και gluino γράφεται

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_y \quad (4.12a)$$

όπου

$$\mathcal{L}_m = m^2 (p^+ p + q^+ q) \quad (4.12b)$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \lambda_1[(p^+p)^2 + (q^+q)^2] + \lambda_2(p^+p)(q^+q) + \lambda_3(p^+q)(q^+p) \\ & + \lambda_4[(p^+t^\alpha p)^2 + (q^+t^\alpha q)^2] + \lambda_5(p^+t^\alpha p)(q^+t^\alpha q) + \lambda_6(p^+t^\alpha q)(q^+t^\alpha p) \end{aligned} \quad (4.12c)$$

και

$$\mathcal{L}_y = y[\bar{p}^T \lambda \chi_p + \bar{\chi}_p^T \bar{\lambda} p + \bar{q}^T \lambda \chi_q + \bar{\chi}_q^T \bar{\lambda} q] \quad (4.12d)$$

με $\lambda = \lambda^\alpha t^\alpha$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^\alpha t^\alpha$ και $t^\alpha = \frac{1}{2}g^\alpha$ όπου g είναι οι πίνακες Gell-Mann.

Για την περίπτωση $N_f = 1$ δεν απαλείφεται κάποιος όρος από την (4.12) και έτσι υπάρχουν 8 fine-tunings. Για $N_f = 2$ αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 12 παραμέτροι και για $N_f > 2$ υπάρχουν 14. Ωστόσο, η διαδικασία προσαρμογής και των 14 παραμέτρων της SU(3) SQCD για $N_f > 2$ με στόχο να αναπαραχθεί η σωστή θεωρία στο συνεχές είναι πολύ δύσκολη.

4.3 Όροι των Λαγκρανζιανών της SQED και SQCD εκτός της βαθμίδας Wess-Zumino

Στο υποκεφάλαιο (4.2) υπολογίστηκαν οι πιο γενικοί όροι της Λαγκρανζιανής στην βαθμίδα Wess-Zumino των θεωριών SU(2) SQCD και SU(3) SQCD χρησιμοποιώντας μόνο τις συμμετρίες τους. Ωστόσο, αν κάποιος επιχειρούσε να κβαντώσει μια θεωρία με Λαγκρανζιανή εκτός της βαθμίδας Wess-Zumino μέσω του συναρτησιακού ολοκληρώματος θα ήταν αναγκαίο να βρεθούν οι επιπλέον όροι για την πιο γενική αυτή περίπτωση. Αυτό συμβαίνει επειδή η ολοκλήρωση θα έπρεπε να γίνει ως προς όλα τα πεδία ακόμα και ως προς αυτά τα οποία στη βαθμίδα Wess-Zumino μηδενίζονται. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα υπολογιστεί ένα μέρος της Λαγκρανζιανής της SQED και SQCD στο συνεχές για την γενική αυτή περίπτωση. Ο υπολογισμός αυτός είναι χρήσιμος γιατί θα μπορούσε κάποιος να ακολουθήσει την διαδικασία του υποκεφαλαίου (4.2) για να βρει τους όρους που εμφανίζονται στο πλέγμα και έχοντας το αποτέλεσμα στο συνεχές να προσαρμόσει τις επιπλέον παραμέτρους που εμφανίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε στο όριο $a \rightarrow 0$ η διακριτοποιημένη θεωρία να ταυτίζεται με την συνεχή.

Αρχικά μπορεί να υπολογιστεί ο όρος της Λαγκρανζιανής της SQED (3.45) που περιέχει τα δύο χειραλικά υπερπεδία $\Phi(x, \theta)$, $\Phi^+(x, \bar{\theta})$ που ορίζονται στις (3.28), (3.30) και το διανυσματικό υπερπεδίο V στην γενική του μορφή (3.34). Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το εξής

$$\begin{aligned}
\Phi^+ e^{tV} \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = e^{tC} & \left\{ A\Box A^* + FF^* + i\partial_m \bar{\psi} \bar{\sigma}^m \psi + t \left[i v^m \partial_m A A^* \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} A A^* \left(D + \Box \frac{C}{2} \right) + \frac{i}{2} F^* A \left(M + iN \right) - \frac{i}{2} A^* F \left(M - iN \right) \\
& - \frac{i}{\sqrt{2}} \chi \psi F^* + \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\chi} \bar{\psi} F - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \bar{\lambda} A + \frac{i}{\sqrt{2}} \psi \lambda A^* \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi \sigma^m \partial_m \bar{\psi} A + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_m \psi \sigma^m \bar{\chi} A^* \left. \right] + \frac{t^2}{2!} \left[-\frac{1}{2} A A^* v^m v_m \right. \\
& + \frac{1}{2} A A^* \left(M^2 + N^2 \right) + \frac{A F^*}{2} \chi \chi + \frac{A^* F}{2} \bar{\chi} \bar{\chi} - \frac{1}{\sqrt{2}} A^* \chi \psi \left(M - iN \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} A \bar{\chi} \bar{\psi} \left(M + iN \right) - \frac{i}{\sqrt{2}} A \chi \sigma^m \bar{\psi} v_m + \frac{i}{\sqrt{2}} A^* \psi \sigma^m \bar{\chi} v_m \\
& - A A^* \chi \lambda - A A^* \bar{\chi} \bar{\lambda} - i A \partial_m A^* \chi \sigma^m \bar{\chi} - i A A^* \chi \sigma^m \partial_m \bar{\chi} \\
& + \chi \psi \bar{\chi} \bar{\psi} + \frac{t^3}{3!} \left[\frac{-3i}{4} A A^* \left(M - iN \right) \chi \chi + \frac{3i}{4} A A^* \left(M + iN \right) \bar{\chi} \bar{\chi} \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} A A^* \chi \sigma^m \bar{\chi} v_m + \frac{3\sqrt{2}i}{4} A \bar{\chi} \bar{\psi} \chi \chi - \frac{3\sqrt{2}i}{4} A^* \psi \chi \bar{\chi} \bar{\chi} \right] \\
& \left. + \frac{t^4}{4!} \left[\frac{3}{2} A A^* \chi \chi \bar{\chi} \bar{\chi} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Ακόμη μπορεί να υπολογιστεί ο όρος gauge fixing για τις υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας που ισούται με $-\frac{1}{8\xi}(\bar{D}^2 V)(D^2 V)$ χρησιμοποιώντας και πάλι την γενική μορφή του V (3.34) και τους τελεστές D, \bar{D} όπως δίνονται στην (3.23). Ο όρος αυτός για την περίπτωση της SQED δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8\xi}(\bar{D}^2 V)(D^2 V) = -\frac{1}{8\xi} & \left\{ 4M\Box M + 4N\Box N + 4(D + \Box C)^2 + 4(\partial^m v_m)^2 \right. \\
& \left. - 8i\chi\sigma^m\partial_m\Box\bar{\chi} - 8i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} - 8\lambda\Box\chi - 8\Box\bar{\chi}\bar{\lambda} \right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Στις (4.13), (4.14) παραλήφθηκαν ολικές παραγώγοι αφού οι δράσεις των θεωριών παραμένουν αναλλοίωτες κατά την πρόσθεση ή αφαίρεση ολικών παραγώγων. Στην SQCD τα συνιστάμενα πεδία ψ, χ βρίσκονται στην θεμελιώδη

αναπαράσταση της ομάδας $SU(3)$, δηλαδή αποκτούν χρωματικό δείκτη που παίρνει τιμές από 1 μέχρι 3 και το συνιστάμενο πεδίο λ βρίσκεται στην προσαρτημένη αναπαράσταση της $SU(3)$, δηλαδή μπορεί να γραφεί στην μορφή $\lambda = \lambda^\alpha T^\alpha$ όπου T^α είναι οι γεννήτορες της $SU(3)$. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι η μορφή των (4.13), (4.14) δεν θα αλλάξει. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι η σχέση του gauge fixing (4.14) των υπερσυμμετρικών θεωριών βαθμίδας περιέχει την ποσότητα $(\partial^m v_m)^2$ την οποία περιέχουν και οι όροι gauge fixing των θεωριών QCD και QED. Επίσης, φαίνεται από τις πιο πάνω σχέσεις ότι στις Λαγκρανζιανές των υπερσυμμετρικών θεωριών βαθμίδας εκτός της βαθμίδας Wess-Zumino εμφανίζονται όλα τα συνιστάμενα πεδία που εμπεριέχονται στο γενικό V (3.34). Επομένως πρέπει όλα αυτά τα πεδία να διακριτοποιηθούν στο πλέγμα, γεγονός που επιφέρει πολλούς όρους και αρκετές παραμέτρους και επομένως καθιστά την κατασκευή μιας πλεγματικής Λαγκρανζιανής της SQCD ή SQED πολύ δύσκολη.

4.4 Υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills (SYM) στο πλέγμα

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο τονίστηκε η δυσκολία διακριτοποίησης των θεωριών SQCD και SQED στο πλέγμα που οφείλεται στις πολλές παραμέτρους που πρέπει να γίνουν fine-tuned. Ωστόσο, η υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills (SYM) και η QCD δεν παρουσιάζουν την πολυπλοκότητα των άλλων θεωριών. Συγκεκριμένα, σε αυτές τις θεωρίες προκύπτει μόνο ένας επιπλέον όρος στο πλέγμα, ο οποίος απαλείφεται αν χρησιμοποιηθεί διακριτοποίηση φερμιονικών πεδίων τύπου Ginsparg-Wilson.

Στο συνεχές όριο η Λαγκρανζιανή της SYM γράφεται

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SYM} &= \frac{1}{16k g^2} \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \\ &= -\frac{1}{4} v_{mn}^{(\alpha)} v_{mn}^{(\alpha)} - i \bar{\lambda}^{(\alpha)} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \lambda^{(\alpha)} + \frac{1}{2} D^{(\alpha)} D^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \lambda^{(\alpha)} &= \partial_m \lambda^{(\alpha)} - g t^{abc} v_m^{(b)} \lambda^{(c)} \\ v_{mn}^{(\alpha)} &= \partial_m v_n^{(\alpha)} - \partial_n v_m^{(\alpha)} - g t^{abc} v_m^{(b)} v_n^{(c)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Η (4.15) περιέχει το βοηθητικό πεδίο D^α , το gluino $\lambda^{(\alpha)}$ και το γλουόνιο $v_m^{(\alpha)}$. Τα πεδία αυτά βρίσκονται στην προσαρτημένη αναπαράσταση της $SU(3)$ και έτσι οι δείκτες α παίρνουν τιμές από 1 μέχρι 8. Όμως, πεδία ύλης δεν υπάρχουν. Η Λαγκρανζιανή αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μη-αβελιανό μετασχηματισμό βαθμίδας (3.53). Επίσης είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς υπερσυμμετρίας και η μορφή της δεν αλλάζει όταν βρίσκεται σε τυχαία βαθμίδα δηλαδή εκτός της βαθμίδας Wess-Zumino. Έτσι σε αντίθεση με τις θεωρίες SQCD και SQED, στην υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills δεν υπάρχουν συζεύξεις με τα συνιστάμενα πεδία C,M,N, χ . Επομένως δεν χρειάζεται να διακριτοποιηθούν στο πλέγμα.

Η Λαγκρανζιανή (4.15) θα μπορούσε να ξαναγραφτεί σε μια διαφορετική μορφή αντικαθιστώντας τον Majorana σπίνορα του gluino με σπίνορα Dirac. Αυτή η μορφή διευκολύνει την σύγκριση με τις Λαγκρανζιανές συνεχών θεωριών. Σε αυτή την περίπτωση

$$\mathcal{L}_{SYM} = -\frac{1}{4}v_{mn}^{(\alpha)}v_{mn}^{(\alpha)} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}_D^{(\alpha)}\gamma^m\mathcal{D}_m\lambda_D^{(\alpha)} + \frac{1}{2}D^{(\alpha)}D^{(\alpha)} \quad (4.17)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m\lambda^{(\alpha)} &= \partial_m\lambda^{(\alpha)} - gt^{abc}v_m^{(b)}\lambda^{(c)} \\ v_{mn}^{(\alpha)} &= \partial_mv_n^{(\alpha)} - \partial_nv_m^{(\alpha)} - gt^{abc}v_m^{(b)}v_n^{(c)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

και

$$\lambda_D = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Φαίνεται ότι ο όρος της (4.17) που περιέχει τον γλουονικό ταυυστή $v_{mn}^{(\alpha)}$ είναι ο ίδιος με τον κινηματικό όρο της Λαγκρανζιανής της QCD που φαίνεται από την δράση (1.33). Επίσης, ο όρος της (4.17) που περιέχει το γλουίνο $\lambda_D^{(\alpha)}$ είναι σχεδόν ο ίδιος με τον φερμιονικό όρο της Λαγκρανζιανής της QCD (1.30) για μάζα $M_0 = 0$. Κατ' ακρίβεια οι δύο όροι διαφέρουν κατά ένα πολλαπλασιαστικό παράγοντα $\frac{1}{2}$ αλλά αποδεικνύεται ότι αυτός δεν επηρεάζει τις συναρτήσεις συσχετισμού των θεωριών. Επομένως αν αγνοηθεί το βοηθητικό πεδίο D της (4.17) τότε η διακριτοποίηση της θεωρίας SYM ομοιάζει πολύ με την διακριτοποίηση της SQCD. Η μόνη διαφορά είναι η αλλαγή της μορφής των συνδέσμων U (1.29). Αυτή η διαφορά θα μελετηθεί πιο αναλυτικά στο επόμενο υποκεφάλαιο.

4.5 Επανακανονικοποίηση διγραμμικών φερμιονικών τελεστών σε ένα βρόχο στις θεωρίες QCD και SYM στο πλέγμα

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν οι συναρτήσεις επανακανονικοποίησης Z_Γ βαθμωτών, ψευδοβαθμωτών, διανυσματικών, ψευδοδιανυσματικών και ταυυστικών διγραμμικών φερμιονικών τελεστών που δίνονται από την σχέση $\mathcal{O} = \bar{\psi}\Gamma\psi$, με $\Gamma = \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$ ($\sigma_{\mu\nu} = 1/2[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$) αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις συσχετισμού των τελεστών Γ είναι χρήσιμες αφού σε αριθμητικές προσομοιώσεις θεωριών στο πλέγμα χρησιμοποιούνται για να μελετηθούν αδρονικές ιδιότητες. Η επανακανονικοποίηση των διγραμμικών φερμιονικών τελεστών είναι απαραίτητη για να αποφευχθούν απειρισμοί που προκύπτουν σε αυτές τις συναρτήσεις συσχετισμού και για ορθή σύγκριση με ποσότητες που θα ήταν πειραματικά μετρήσιμες. Συγκεκριμένα σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των Z_Γ που προέκυψαν από την θεωρία διαταραχών στη QCD στο πλέγμα σε ένα βρόχο και στη συνέχεια θα παρουσιαστεί ο τρόπος επέκτασης των αποτελεσμάτων για την περίπτωση της θεωρίας SYM στο πλέγμα.

Οι διγραμμικοί φερμιονικοί τελεστές μπορεί να είναι είτε τοπικοί, δηλαδή να αποτελούνται από φερμιόνιο και αντιφερμιόνιο που βρίσκονται στην ίδια θέση x στον χωρόχρονο, είτε μη τοπικοί, δηλαδή το φερμιόνιο και αντιφερμιόνιο να βρίσκονται σε διαφορετική θέση x . Οι τελεστές που θα μελετηθούν παρακάτω θα είναι τοπικοί. Επίσης, οι τελεστές χωρίζονται σε μονήρεις ως προς την γεύση των φερμιονίων και αντιφερμιονίων και μη μονήρεις. Ωστόσο, σε υπολογισμούς ενός βρόχου τα αποτελέσματα για τις δύο περιπτώσεις συμπίπτουν. Στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε η δράση Wilson για γλουόνια και η βελτιωμένη δράση clover Wilson για φερμιόνια. Έτσι η θεωρία της QCD στο πλέγμα έχει γραφεί ως

$$\begin{aligned}
S_L &= S_G + \sum_f \sum_x (4r + m_0) \bar{\psi}_f(x) \psi_f(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_f \sum_{x,\mu} \left[\bar{\psi}_f(x) (r - \gamma_\mu) U_{x,x+\mu} \psi_f(x+\mu) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \bar{\psi}_f(x+\mu) (r + \gamma_\mu) U_{x+\mu,x} \psi_f(x) \right] \\
&\quad + \frac{i}{4} c_{\text{sw}} \sum_f \sum_{x,\mu,\nu} \bar{\psi}_f(x) \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(x) \psi_f(x), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu\varepsilon : \quad \hat{F}_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{8a^2} (Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}) & (4.20) \\
\text{και} : \quad Q_{\mu\nu} &= U_{x,x+\mu} U_{x+\mu,x+\mu+\nu} U_{x+\mu+\nu,x+\nu} U_{x+\nu,x} \\
&+ U_{x,x+\nu} U_{x+\nu,x+\nu-\mu} U_{x+\nu-\mu,x-\mu} U_{x-\mu,x} \\
&+ U_{x,x-\mu} U_{x-\mu,x-\mu-\nu} U_{x-\mu-\nu,x-\nu} U_{x-\nu,x} \\
&+ U_{x,x-\nu} U_{x-\nu,x-\nu+\mu} U_{x-\nu+\mu,x+\mu} U_{x+\mu,x} & (4.21)
\end{aligned}$$

S_G είναι ο κινηματικός όρος της γλουονικής δράσης και δίνεται από την σχέση (1.23). Ο συντελεστής c_{SW} είναι μια ελεύθερη παράμετρος, γ η παράμετρος Wilson η οποία παρακάτω τέθηκε ίση με 1 και f ο δείκτης χρώματος. Η ελεύθερη παράμετρος m_0 τέθηκε ίση με την κριτική μάζα m_{cr} ούτως ώστε η επακανονικοποιημένη μάζα να μηδενίζεται. Η μελέτη τοπικών τελεστών μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες βελτιωμένες δράσεις στο πλέγμα χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του [17].

Για να υπολογιστούν τα διαταρακτικά αποτελέσματα σε ένα βρόχο των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης υπολογίστηκαν πρώτα οι απογυμνωμένες (bare), ακρωτηριασμένες (amputated) και one-particle irreducible (1PI) συναρτήσεις Green:

- Φερμιονική self-energy: $\Sigma_\psi^L(q, a_L)$
- Συνάρτηση συσχετισμού με δύο σημεία της βαθμωτής ποσότητας $\bar{\psi}\psi$: $\Sigma_S^L(qa_L)$
- Συνάρτηση συσχετισμού με δύο σημεία της ψευδοβαθμωτής ποσότητας $\bar{\psi}\gamma_5\psi$: $\Sigma_P^L(qa_L)$
- Συνάρτηση συσχετισμού με δύο σημεία του διανυσματικού τελεστή $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$: $\Sigma_V^L(qa_L)$
- Συνάρτηση συσχετισμού με δύο σημεία του ψευδοδιανυσματικού τελεστή $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$: $\Sigma_{AV}^L(qa_L)$
- Συνάρτηση συσχετισμού με δύο σημεία του τανυστικού τελεστή $\bar{\psi}\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\psi$: $\Sigma_T^L(qa_L)$

με a_L την σταθερά πλέγματος και q την εξωτερική ορμή.

Όπως θα γίνει φανερό παρακάτω, χρησιμοποιώντας τις απογυμνωμένες συναρτήσεις Green μπορούν να κατασκευαστούν οι συναρτήσεις

επανακανονικοποίησης του τελεστή \mathcal{O} , $Z_{\mathcal{O}}^{X,Y}$ με X να υποδηλώνει τον ομαλοποιητή (στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το πλέγμα $X=L$) και Y το σχήμα επανακανονικοποίησης.

Για την επανακανονικοποίηση διγραμμικών φερμιονικών τελεστών είναι απαραίτητη η επανακανονικοποίηση του πεδίου ψ , Z_{ψ} . Αυτή ορίζεται όπως φαίνεται στην σχέση

$$\psi_o = \sqrt{Z_{\psi}^{L,RI'}} \psi \quad (4.22)$$

όπου το ψ_o είναι το απογυμνωμένο πεδίο όπως εμφανίζεται στην Λαγκρανζιανή της θεωρίας και το ψ το επανακανονικοποιημένο πεδίο. Το σχήμα επανακανονικοποίησης που χρησιμοποιήθηκε είναι το RI' . Στον ευκλείδιο χώρο ο υπολογισμός της φερμιονικής self energy $\Sigma_{\psi}^L(q, a_L) = i\not{q} + m_o + \mathcal{O}(g_o^2)$ οδηγεί στην εξεύρεση της Z_{ψ} μέσω της εξίσωσης

$$\lim_{a_L \rightarrow 0} \left[Z_{\psi}^{L,RI'}(a_L \bar{\mu}) \text{tr} \left(\Sigma_{\psi}^L(q, a_L) \not{q} \right) / (4i q^2) \right]_{q^2 = \bar{\mu}^2} = 1 \quad (4.23)$$

όπου το ίχνος αφορά τους δείκτες Dirac και η ποσότητα $\bar{\mu}$ είναι η κλίμακα επανακανονικοποίησης.

Από την άλλη, οι τελεστές $\mathcal{O}_{\Gamma} = \bar{\psi} \Gamma \psi$ μπορούν να επανακανονικοποιηθούν ως εξής

$$\mathcal{O}_{\Gamma}^{RI'} = Z_{\Gamma}^{L,RI'}(a_L \bar{\mu}) \mathcal{O}_{\Gamma_o} \quad (4.24)$$

με \mathcal{O}_{Γ_o} να είναι οι απογυμνωμένοι τελεστές.

Οι συναρτήσεις επανακανονικοποίησης των βαθμωτών και ψευδοβαθμωτών διγραμμικών φερμιονικών τελεστών μπορούν να αποκτηθούν από τις σχέσεις

$$\lim_{a_L \rightarrow 0} \left[Z_{\psi}^{L,RI'} Z_S^{L,RI'} \Sigma_S^L(q a_L) \right]_{q^2 = \bar{\mu}^2} = 1 \quad (4.25)$$

$$\lim_{a_L \rightarrow 0} \left[Z_{\psi}^{L,RI'} Z_P^{L,RI'} \Sigma_P^L(q a_L) \right]_{q^2 = \bar{\mu}^2} = \gamma_5 \quad (4.26)$$

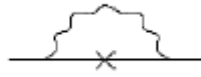
όπου:

$$\Sigma_S^L(q a_L) = 1 + \mathcal{O}(g_o^2) \quad , \quad \Sigma_P^L(q a_L) = \gamma_5 + \mathcal{O}(g_o^2) \quad (4.27)$$

Στην σχέση (4.25) το $Z_S^{L,RI'}$ είναι η συνάρτηση επανακανονικοποίησης της βαθμωτής ποσότητας $\bar{\psi}\psi$ και στην (4.26) το $Z_P^{L,RI'}$ είναι η συνάρτηση επανακανονικοποίησης της ψευδοβαθμωτής ποσότητας $\bar{\psi}\gamma_5\psi$. Ανάλογες εξισώσεις ορίζονται για τον υπολογισμό των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης του

διανυσματικού, ψευδοδιανυσματικού και τανυστικού τελεστή $Z_V^{L,RI'}$, $Z_{AV}^{L,RI'}$ και $Z_T^{L,RI'}$ αντίστοιχα.

Γενικά, για τον υπολογισμό των απογυμνωμένων συναρτήσεων Green των διγραμμικών φερμιονικών τελεστών πρέπει να γίνει άθροισμα ως προς όλα τα δυνατά διαγράμματα Feynman. Στους υπολογισμούς σε ένα βρόχο που αφορούσαν τους τελεστές $\Gamma = \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}$ συνεισέφερε ένα μόνο διάγραμμα και αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Επίσης τα διαγράμματα Feynman που συνεισέφεραν στην φερμιονική self energy $\Sigma_\psi^L(q, a_L)$ φαίνονται στο Σχήμα 4.2.



ΣΧΗΜΑ 4.1: Το διάγραμμα που συνεισφέρει στον υπολογισμό των $Z_V, Z_{AV}, Z_T, Z_S, Z_P$ σε ένα βρόχο. Η κυματιστή (ευθεία) γραμμή αντιστοιχεί σε γλουόνια (φερμιόνια). Ο σταυρός αντιπροσωπεύει τους πίνακες Dirac γ_5 (ψευδοβαθμωτό), $\mathbb{1}$ (βαθμωτό), γ_μ (διανυσματικό), $\gamma_5 \gamma_\mu$ (ψευδοδιανυσματικό) και $\gamma_5 \sigma_{\mu\nu}$ (τανυστικό).



ΣΧΗΜΑ 4.2: Τα διαγράμματα που συνεισφέρουν στον υπολογισμό του Z_ψ σε ένα βρόχο. Η κυματιστή (ευθεία) γραμμή αντιστοιχεί σε γλουόνια (φερμιόνια).

Οι υπολογισμοί των διαγραμμάτων Feynman απαιτούν τον χειρισμό πολύπλοκων αλγεβρικών εκφράσεων. Γι' αυτό τον λόγο οι υπολογισμοί αυτοί έγιναν με την βοήθεια του λογισμικού Mathematica. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης των διγραμμικών φερμιονικών τελεστών σε ένα βρόχο και σε γενική βαθμίδα με απογυμνωμένη παράμετρο βαθμίδας α_0 φαίνονται πιο κάτω [18],[19]

$$Z_T^{L,RI'} = 1 + \frac{g_o^2}{16\pi^2} c_F \left[-\ln(a_L^2 \bar{\mu}^2) + \alpha_o - 17.018079209(7) \right. \\ \left. + 3.91333261(4) c_{SW} + 1.972295300(5) c_{SW}^2 \right] \quad (4.28)$$

$$Z_V^{L,RI'} = 1 + \frac{g_o^2}{16\pi^2} c_F \left[-20.617798655(6) + 4.745564682(3) c_{\text{SW}} + 0.543168028(5) c_{\text{SW}}^2 \right] \quad (4.29)$$

$$Z_{AV}^{L,RI'} = 1 + \frac{g_o^2}{16\pi^2} c_F \left[-15.796283066(5) - 0.247827627(3) c_{\text{SW}} + 2.251366176(5) c_{\text{SW}}^2 \right] \quad (4.30)$$

$$Z_\psi^{L,RI'} = 1 + \frac{g_o^2}{16\pi^2} c_F \left[(\ln(a_L^2 \bar{\mu}^2) - 4.792009570(1)) \alpha_o + 16.644413858(5) - 2.248868528(3) c_{\text{SW}} - 1.397267102(5) c_{\text{SW}}^2 \right] \quad (4.31)$$

$$Z_S^{L,RI'} = 1 + \frac{g_o^2}{16\pi^2} c_F \left[3 \ln(a_L^2 \bar{\mu}^2) - \alpha_o - 16.9524103(1) - 7.7379159(3) c_{\text{SW}} + 1.38038065(4) c_{\text{SW}}^2 \right] \quad (4.32)$$

$$Z_P^{L,RI'} = 1 + \frac{g_o^2}{16\pi^2} c_F \left[3 \ln(a_L^2 \bar{\mu}^2) - \alpha_o - 26.5954414(1) + 2.248868528(3) c_{\text{SW}} - 2.03601561(4) c_{\text{SW}}^2 \right] \quad (4.33)$$

όπου c_F είναι ο τετραγωνικός τελεστής Casimir στη θεμελιώδη αναπαράσταση.

Οι πιο πάνω συναρτήσεις επανακανονικοποίησης, εξαιρουμένων των (4.29) (4.30), παρουσιάζουν εξάρτηση από την γενική βαθμίδα α_o . Επίσης εξαρτώνται από την παράμετρο clover c_{SW} .

Τα αποτελέσματα για τις συναρτήσεις επανακανονικοποίησης $Z_T, Z_V, Z_{AV}, Z_\psi, Z_S, Z_P$, (4.28) – (4.33) της θεωρίας QCD μπορούν να τροποποιηθούν για την θεωρία SYM. Όπως έγινε φανερό στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, η διακριτοποίηση της Λαγκρανζιανής της SYM είναι η ίδια με αυτή της QCD με την μόνη διαφορά στη δράση (4.19) να είναι η μορφή των συνδέσμων U που τροποποιείται ως εξής

$$U_{x, x+\mu} = \exp(i g_0 A_\mu^a(x) T^a) \quad \longrightarrow \quad \tilde{U}_{x, x+\mu} = \exp(i g_0 A_\mu^a(x) \tilde{T}^a) \quad (4.34)$$

με \tilde{T}^a να είναι οι οκτώ γεννήτορες της προσαρτημένης αναπαράστασης της ομάδας SU(3) οι οποίοι ορίζονται ως

$$(\tilde{T}^a)_{bc} = i f_{bac} \quad (4.35)$$

Επίσης οι σχέσεις των γεννητόρων της θεμελιώδους αναπαράστασης της ομάδας SU(3)

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad \sum_a T^a T^a \equiv \mathbb{1} c_F = \mathbb{1} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} = \mathbb{1} \frac{4}{3}, \quad \text{tr}(T^a T^b) = \delta^{ab} \frac{1}{2} \quad (4.36)$$

παίρνουν την πιο κάτω μορφή

$$[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = i f^{abc} \tilde{T}^c, \quad \sum_a \tilde{T}^a \tilde{T}^a \equiv \mathbb{1} \tilde{c}_F = \mathbb{1} N_c = \mathbb{1} 3, \quad \text{tr}(\tilde{T}^a \tilde{T}^b) = \delta^{ab} 3 \quad (4.37)$$

όπου N_c είναι ο αριθμός χρωμάτων.

Έτσι, οι συναρτήσεις επανακανονικοποίησης $Z_T, Z_V, Z_{AV}, Z_\psi, Z_S, Z_P$ δίνονται από τις εξισώσεις (4.28) – (4.33) με μόνη τροποποίηση την αντικατάσταση

$$c_F \longrightarrow \tilde{c}_F = 3 \quad (4.38)$$

Σε διαγράμματα περισσότερων βρόχων, όπου εμφανίζεται εξάρτηση και από τον αριθμό γεύσεων N_f το πέρασμα από την QCD στην SYM απαιτεί και την αντικατάσταση

$$N_f \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (4.39)$$

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε φανερό ότι είναι δυνατή η διακριτοποίηση της θεωρίας SYM στο πλέγμα. Παράλληλα, τονίστηκε η δυσκολία που παρουσιάζεται σε μια ανάλογη διαδικασία για την θεωρία SQCD. Επομένως, μια πιθανή αλλά και συνάμα δύσκολη προέκταση της εργασίας αυτής είναι η ανάπτυξη ενός φορμαλισμού της SQCD στο πλέγμα. Αυτό θα δώσει την δυνατότητα μελέτης μη διαταρακτικών φαινομένων της θεωρίας αυτής μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων, γεγονός που θεωρείται πολύ σημαντικό αφού προς το παρόν δεν είναι δυνατή η αναλυτική ή διαταρακτική προσέγγιση της SQCD σε χαμηλές ενέργειες.

Παράρτημα A

Συμβολισμός και άλγεβρα σπινόρων

Στην εργασία αυτή γίνεται χρήση της μετρικής $\eta_{mn} \sim (-1, 1, 1, 1)$ και των σπινόρων Weyl στον συμβολισμό Van der Waerden.

Οι σπίνορες ψ_α , $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ μετασχηματίζονται κάτω από τις αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ της ομάδας Lorentz αντίστοιχα. Αποτελούνται από δύο συνιστώσες και επομένως οι δείκτες $\alpha, \dot{\alpha}$ παίρνουν την τιμή 1 ή 2.

Οι πίνακες σ ορίζονται ως

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Οι 4 αυτοί πίνακες έχουν ένα δείκτη Lorentz m και δύο σπινωριακούς δείκτες $\alpha, \dot{\alpha}$. Χρησιμοποιώντας τους δείκτες γράφονται

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \tag{A.1}$$

Επίσης ορίζονται οι αντισυμμετρικοί και αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz τανυστές $\varepsilon^{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}$ ως εξής

$$\begin{aligned}\varepsilon_{21} &= \varepsilon^{12} = 1 \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon^{21} = -1 \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = 0\end{aligned}\tag{A.2}$$

Από την (A.2) φαίνεται ότι ισχύει η σχέση $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$. Οι σπίνορες με δείκτες ψηλά και χαμηλά σχετίζονται μέσω του τανυστή ε όπως φαίνεται πιο κάτω

$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}, \quad \psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}\tag{A.3}$$

Ακόμη, ορίζονται οι πίνακες $\bar{\sigma}$ ως εξής

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\tag{A.4}$$

Οι 4x4 πίνακες γ στην αναπαράσταση του Dirac σχετίζονται με τους 2x2 πίνακες σ ως εξής

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}$$

Οι σπίνορες Dirac περιέχουν δύο σπίνορες Weyl

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

ενώ οι σπίνορες Majorana περιέχουν μόνο ένα

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (A.3) και το γεγονός ότι δύο σπίνορες αντιμετατίθενται φαίνεται ότι ισχύει

$$\begin{aligned}\psi\chi &\equiv \psi^{\alpha}\chi_{\alpha} = -\psi_{\alpha}\chi^{\alpha} = \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \chi\psi \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &\equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}\end{aligned}\tag{A.5}$$

όπου γινόμενο $\bar{\psi}\bar{\chi}$ ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει

$$(\chi\psi)^+ = (\chi^{\alpha}\psi_{\alpha})^+ = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi}\tag{A.6}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τους πιο πάνω ορισμούς και συμβάσεις μπορούν να αποδειχθούν μεταξύ άλλων οι πιο κάτω χρήσιμες σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } \sigma^m \bar{\sigma}^n &= -2\eta^{mn} \\
 (\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m)_{\alpha}{}^{\beta} &= -2\eta^{mn} \delta_{\alpha}{}^{\beta} \\
 (\bar{\sigma}^m \sigma^n + \bar{\sigma}^n \sigma^m)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= -2\eta^{mn} \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \theta^{\alpha} \theta^{\beta} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \theta\theta \\
 \theta_{\alpha} \theta_{\beta} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \theta\theta \\
 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \\
 \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \\
 \theta \sigma^m \bar{\theta} \theta \sigma^n \bar{\theta} &= -\frac{1}{2} \theta\theta \bar{\theta}\bar{\theta} \eta^{mn} \\
 (\theta\phi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2} (\phi\psi)(\theta\theta) \\
 (\bar{\theta}\bar{\phi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2} (\bar{\phi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
 \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}} &= -\frac{\partial}{\partial\theta_{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\chi \sigma^n \bar{\psi} = -\bar{\psi} \bar{\sigma}^n \chi \tag{A.9}$$

Βιβλιογραφία

- [1] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories. An Introduction*. World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific, 3rd ed., 2005.
- [2] T. Reisz, “Renormalization of lattice feynman integrals with massless propagators,” *Commun. Math. Phys.* *117* (1988) 639.
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, Massachussetts: Perseus Books, 1995.
- [4] H. Kawai, R. Nakayama and K. Seo, “Comparison of the Lattice Λ parameter with the continuum Λ parameter in massless QCD,” *Nucl. Phys. B* *189* (1981) 40-62, 2003.
- [5] J. Wess, “From symmetry to supersymmetry,” *Eur. Phys. J. C*, *59* 2 (2009) 177-183 [arXiv: 0707.2906].
- [6] K. A. Olive *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Chin. Phys.* *C38* (2015) 090001.
- [7] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton Series in Physics, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2nd ed., 1992.
- [8] A. Casher and Y. Shamir, “Feynman rules for non-perturbative sectors and anomalous supersymmetry ward identities,” [arXiv: hep-th/9908074], 1999.
- [9] V. S. Kaplunovsky and J. Louis, “Model independent analysis of soft terms in effective supergravity and in string theory,” *Phys. Lett. B* *306* (1993) 269, [arXiv: hep-th/9303040].
- [10] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, “M theory as a matrix model: A conjecture,” *Phys. Rev. D* *55* (1997) 5112, [arXiv: hep-th/9610043].

-
- [11] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, “A large- n reduced model as superstring,” *Nucl. Phys. B* *497* (1997) 467, [arXiv: hep-th/9612115].
- [12] J. M. Maldacena, “The large n limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* *2* (1998) 231, [arXiv: hep-th/9711200].
- [13] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B* *428* (1998) 105, [arXiv: hep-th/9802109].
- [14] E. Witten, “Anti-de sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* *2* (1998) 253, [arXiv: hep-th/9802150].
- [15] N. Seiberg and E. Witten, “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $n=2$ supersymmetric qcd,” *Nucl. Phys. B* *431* (1994) 484, [arXiv: hep-th/9408099].
- [16] J. Giedt, “Progress in four-dimensional lattice supersymmetry,” *Int.J.Mod.Phys. A* *24* (2009) 4045-4095, [arXiv: 0903.2443], 2009.
- [17] C. Alexandrou, M. Constantinou, T. Korzec, H. Panagopoulos, F. Stylianou, “Renormalization constants of local operators for wilson type improved fermions,” *Phys. Rev. D* *86* (2012) 014505, [arXiv: 1201.5025].
- [18] A. Skouroupathis and H. Panagopoulos, “Two-loop renormalization of scalar and pseudoscalar fermion bilinears on the lattice,” *Phys. Rev. D* *76* (2007) 094514, *Erratum-ibid. D* *78* (2008) 119901, [arXiv: 0707.2906].
- [19] A. Skouroupathis and H. Panagopoulos, “Two-loop renormalization of vector, axial-vector and tensor fermion bilinears on the lattice,” *Phys. Rev. D* *79* (2009) 094508, [arXiv: 0811.4264].